



www.zonetech.in

ZONE TECH

Best Institute For Assistant & Junior Engineer

CIVIL ENGINEERING

E-Book

for

(Diploma Students)

CE

Diploma

FM

FLUID MECHANICS

SSC-JE
STAFF SELECTION COMMISSION-JE

RRB-JE
RAILWAY RECRUITMENT BOARD-JE

State-AE/JE
STATE LEVEL EXAMINATIONS

PSUs
PUBLIC SECTOR EXAMINATIONS

CONTACT US: **ZONE TECH**

H.O.: M-28, Madhuban Colony, Near Tonk Bridge, Tonk Phatak, Jaipur

B.O.: F-26/A, Behind Pinkcity Honda Showroom, Gatta Stand, Tonk Road, Jaipur



+91-9828747676
+91-9462447676

www.zonetech.in
www.onlinezonetech.in
info@zonetech.in

CHAPTER - 1

(PROPERTIES OF FLUID)

Fluid Statics (द्रव-स्थैतिक) :-

→ यह तरल यान्त्रिकी की वह शाखा है जिसमें fluid की rest condition में अध्ययन किया जाता है।

जैसे :- गिलास में पानी (स्थिर अवस्था में)

Fluid Kinematics (शुद्ध तरल गतिकी) :- तरल यान्त्रिकी की वह शाखा जिसमें गतिशील तरल के व्यवहार का अध्ययन गति के कारण (बल) को शामिल नहीं करके किया जाता है। यहां निम्नलिखित को अध्ययन के लिए शामिल किया जाता है।

$$\text{Velocity (v)} = \frac{ds}{dt}$$

$$\text{Acceleration (a)} = \frac{dv}{dt}$$

$$\text{Angular velocity } (\omega) = \frac{d\theta}{dt}$$

Fluid Dynamics (तरल गतिकी) :- तरल यान्त्रिकी की वह शाखा जिसमें तरल की गति का मुख्य कारण बल को भी शामिल करके अध्ययन किया जाता है।

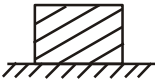
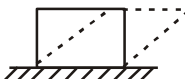
Fluids (Liquid and gas):- ऐसा पदार्थ जो स्पर्शीय प्रतिबल या कर्तन प्रतिबल से लगातार विरूपित होता रहता है और यह मायने नहीं रखता है कि उसकी (स्पर्शी बल) मात्रा कितनी है।

Note (नोट) :-

- ठोस में प्रतिबल (stress) विकृति (strain) के समानुपाती होती है।
- लेकिन fluids में प्रतिबल (stress) विकृति दर (strain rate) के समानुपाती होती है।
- जब नियत कर्तन प्रतिबल लगाया जाता है तो solid एक निश्चित विकृति कोण पर deform होना बन्द कर देता है, जबकि fluid कभी भी deform होना बन्द नहीं होता और वह एक नियत विकृति दर को प्राप्त कर लेता है।

Difference between solid as well as fluid (Liquid or gases)

ठोस तथा तरल में अन्तर (द्रव व गैस) :-

Solid	Fluid
 • Elastic limit से ज्यादा बल लगाने पर solid स्थायी रूप से deform हो जाता है। • Elastic limit से कम बल लगाने पर solid अपनी पूर्वावस्था में पुनः आ जाता है।	 • Fluid स्थायी रूप से deform हो जाता है लेकिन यह मायने नहीं रखता कि लगाये स्पर्शीय बल की मात्रा कितनी है। • Fluids पर एक बार बल लगा लेने के बाद वह अपनी प्रारम्भिक अवस्था में कभी नहीं आती है।

Types of Fluid (तरल के प्रकार)

1. Ideal Fluid (आदर्श तरल) :-

- एक आदर्श तरल असम्पीड्य होता है तथा इसमें पृष्ठ तनाव (surface tension) श्यानता (viscosity) नहीं होती है।
- व्यावहारिक तौर पर ऐसा कोई fluids नहीं होता है, हालांकि तरल जैसे वायु, पानी इत्यादि की श्यानता तथा पृष्ठ तनाव बहुत कम होती है जिसके कारण इनको सभी प्रयोगों में आदर्श तरल की तरह माना जा सकता है।

2. Real Fluid (वास्तविक तरल) :-

- वास्तविक तरल (Real fluid) सम्पीड्य होते हैं तथा इनमें श्यानता तथा पृष्ठ तनाव होता है।
- व्यावहारिक तौर पर सभी fluids real fluids होते हैं।

Some properties of fluid (तरल के कुछ गुणधर्म)

(1) Density (घनत्व) (ρ):-

- किसी fluids के इकाई आयतन का द्रव्यमान उसका घनत्व कहलाता है, इसको ρ से प्रदर्शित करते हैं।

$$\rho = \frac{\text{द्रव्यमान (m)}}{\text{आयतन (v)}}$$

• Unit

In MKS = kg/m^3

In CGS = gram/cm^3

$$1 \frac{\text{gram}}{\text{cm}^3} = \frac{10^{-3} \text{ kg}}{10^{-6} \text{ m}^3} = 10^3 \text{ kg/m}^3$$

• Dimension (विमा) :-

$M^1 L^{-3} T^0$

Note:-

$$\rho_{\text{water}} = 1 \frac{\text{gram}}{\text{cm}^3} = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, \rho_{\text{Hg}} = 13.6 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$$

- 4° पर पानी सबसे अधिक density प्रदर्शित करता है।

घनत्व पर दाब तथा ताप का प्रभाव

- liquid के घनत्व पर दाब तथा ताप का कोई प्रभाव नहीं पड़ता
- लेकिन गैसों के लिए दाब बढ़ाने पर घनत्व बढ़ता है तथा तापमान बढ़ाने पर घनत्व कम होता है।

(2) Specific Volume (विशिष्ट आयतन) (V):- किसी fluid द्वारा इकाई द्रव्यमान द्वारा घेरा गया आयतन specific volume कहलाता है।

$$\text{Specific Volume} = \frac{\text{तरल का आयतन (V)}}{\text{तरल का द्रव्यमान (M)}}$$

$$V = \frac{1}{\frac{M}{V}} = \frac{1}{\rho}$$

Unit:- In MKS $\rightarrow \text{m}^3/\text{kg}$

CGS $\rightarrow \text{cm}^3/\text{gram}$

Dimension:- $M^{-1} L^3 T^0$

(3) Specific Gravity (विशिष्ट गुरुत्व) (s):-

- यह सापेक्ष घनत्व प्रस्तुत करने का दूसरा तरिका है।
- यह किसी पदार्थ का घनत्व तथा उसके सापेक्ष मानक तरल के घनत्व का अनुपात होता है।

$$S = \frac{\text{तरल का घनत्व}}{\text{मानक तरल का घनत्व}}$$

For liquid:- Standard fluid $\Rightarrow$ water, $\rho_w = 1000 \text{ kg/m}^3$

For gases:- Standard fluid $\Rightarrow$ Air $= \rho_{\text{air}} = 1.21 \text{ kg/m}^3$

- **Dimension:-** $M^0L^0T^0$
- Unitless
- समान राशियों का अनुपात होने के कारण इसकी कोई विमा नहीं होती है। यह dimensionless राशि है।
- **For Hg:-**

$$S_{\text{Hg}} = \frac{\rho_{\text{Hg}}}{\rho_{\text{standard fluid}}} = \frac{13.6 \times 10^3}{10^3} = 13.6$$

For Water :-

$$S_{\text{Hg}} = \frac{\rho_{\text{water}}}{\rho_{\text{standard fluid}}} = \frac{10^3}{10^3} = 1$$

(4) Relative Density (सापेक्ष घनत्व) (R.D.) :-

- यह fluid (1) तथा fluid (2) के घनत्व का अनुपात होता है।
- यह भी समान राशियों का अनुपात होती है इसीलिए इसकी कोई विमा नहीं होती है।

$$R.D. = \frac{\text{Density of fluid 1}}{\text{Density of fluid 2}}$$

- Dimension- $M^0L^0T^0$
- Unitless

(5) Specific weight or weight density (विशिष्ट भार या भार घनत्व) (w):-

- किसी पदार्थ के इकाई आयतन के भार को specific weight कहते हैं।

$$w = \frac{mg}{V}$$

$$w = \rho g$$

Unit:-

$$\frac{\text{Kg}}{\text{m}^3} \times \frac{\text{m}}{\text{sec}^2} \text{ or } \frac{\text{N}}{\text{m}^3}$$

Dimension

$$= \frac{\text{Kg}}{\text{m}^2 \times \text{sec}^2}$$

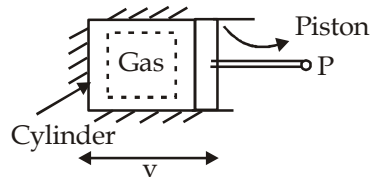
$$= M^1L^{-2}T^{-2}$$

$$w_{\text{water}} = 10^3 \times 9.81 \text{ N/m}^3 = 9810 \text{ N/m}^3$$

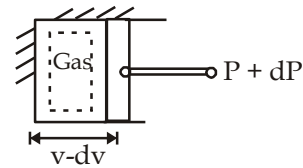
$$w_{\text{Hg}} = 13.6 \times 10^3 \times 9.81 \text{ N/m}^3$$

(6) Compressibility (सम्पीडयता) (β) :-

- यह किसी fluids की दाब के साथ आयतन में बदलाव के गुण को प्रदर्शित करता है।
- यह bulk modulus of elasticity का उल्टा होता है।
- Bulk modulus सम्पीडन प्रतिबल तथा आयतनिक विकृति का अनुपात होता है।
- इसको β से दर्शाते हैं।



Initial condition



Final condition

$$\begin{aligned}\text{Change in pressure} &= \text{Final pressure} - \text{Initial pressure} \\ &= P + dP - P = dP\end{aligned}$$

$$\text{Change in volume} = (V - dv) - V = -dv$$

$$\text{Volumetric Strain (आयतनिक विकृति)} = \frac{\text{change in volume}}{\text{Volume}} = \frac{-dV}{V}$$

यहां ऋण चिन्ह आयतन में कमी को दर्शाता है।

$$K = \frac{dP}{\left(\frac{-dV}{V}\right)} = -\frac{VdP}{dV} \quad \dots(1)$$

We know that

$$\beta = \frac{1}{k}, \quad \beta = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dP} \quad \dots(2)$$

In general,

$$m = \rho v$$

differentiate it

$$0 = \rho dv + v d\rho \quad \because dm = 0$$

$$-v d\rho = \rho dv \Rightarrow \frac{d\rho}{\rho} = \frac{-dV}{V}$$

Put in equation (1)

$$K = \frac{dP}{\frac{d\rho}{\rho}} \Rightarrow K = \rho \frac{dP}{d\rho} \quad \dots(3)$$

So

$$\beta = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dP} \quad \dots(4)$$

For liquid

हम जानते हैं कि incompressible होते हैं इसीलिए

$$d\rho = 0$$

$$K = \infty \quad \dots(5)$$

$$\beta = 0 \quad \dots(6)$$

For gases

हम जानते हैं कि compressible होती है इसीलिए

$$d\rho \neq 0$$

$$K \neq \infty \quad \dots(7)$$

$$\beta \neq 0 \quad \dots(8)$$

(a) Isothermal compressibility of a gas (गैस की समतापीय सम्पीडयता) :-

- समतापीय प्रक्रम के लिए

$$PV = \text{constant}$$

differentiate it

$$Vdp + p dv = 0 \Rightarrow p dv = -V dp$$

$$-\frac{dV}{V} = \frac{dP}{P} \Rightarrow P = \left(\frac{-dV}{\frac{dV}{V}} \right)$$

$P = \text{Bulk modulus of elasticity (K)}$

$$K_{\text{iso}} = P \because P = \rho RT$$

or

$$K_{\text{iso}} = \rho RT \text{ and } \beta_{\text{iso}} = \frac{1}{P} = \frac{1}{\rho RT}$$

Unit of K is Pascal

(b) Adiabatic compressibility of a gas (गैस की रुद्धोष्म सम्पीडयता) :-

- रुद्धोष्म प्रक्रम के लिए

$$PV^\gamma = \text{constant}$$

अवकलन करने पर-

$$V^\gamma dp + [\gamma V^{\gamma-1} dV] P = 0$$

$$V^{\gamma-1} [V dP + \gamma P dV] = 0$$

$$V dP = -\gamma P dV$$

$$\gamma P = \left(\frac{-dP}{\frac{dV}{V}} \right)$$

$$K = \gamma P$$

$$K_{\text{adiabatic}} = \gamma P$$

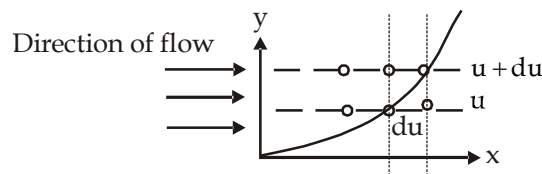
Adiabatic bulk modulus = $\gamma P = \text{Adiabatic Index} \times \text{Pressure}$

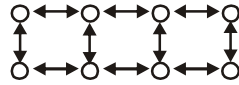
$$\beta_{\text{adiabatic}} = \frac{1}{\gamma P}$$

Viscosity (μ)

(श्यानता) (μ)

- श्यानता (viscosity) प्रवाह का आन्तरिक प्रतिरोध का मापक होती है



Cause of viscosity (श्यानता का कारण) :-

- Viscosity होने का कारण molecules के मध्य attraction force होता है जिसे cohesive force कहते हैं।

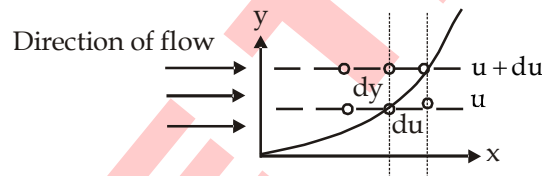
Definition (परिभाषा) :-

- जब fluids की पास पास वाली layer सापेक्ष गति में होती है तो वे आपस में गति का विरोध करती है fluid की यह fundamental property viscosity कहलाती है।
- यह (viscosity) प्रवाह का आन्तरिक प्रतिरोध का मापन होता है।
- Viscosity fluids का गुणधर्म होती है न कि प्रवाह का
- द्रवों के लिए गैसों की तुलना में संसर्जक बल (cohesive force) का मान बहुत अधिक होता है यही कारण है कि द्रवों की श्यानता गैसों की तुलना में बहुत अधिक होती है।
- गैसों में viscosity का मुख्य कारण particle का random motion है।

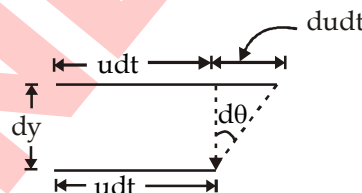
Note :-

- water की dynamic viscosity का मान air की dynamic viscosity से 50 गुना ज्यादा होता है।

$$\mu_{H_2O} >>>> \mu_{air}$$

Shear strain:-

In time interval = dt



Shear strain

$$\tan d\theta = \frac{dudt}{dy}$$

If θ is very small $\tan d\theta \approx d\theta$

$$d\theta = \frac{dudt}{dy}$$

where $d\theta$ = Shear strain or angular deformation

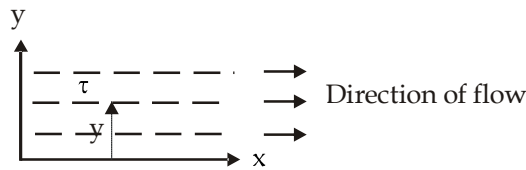
$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{du}{dy}$$

where $\frac{d\theta}{dt}$ = कर्तन विकृति की दर, प्रवाह की दिशा में कोणीय विरूपण की दर

$\frac{du}{dy}$ = प्रवाह के लम्बवत वेग प्रवणता है

Newton's law of viscosity (न्यूटन का श्यानता का नियम) :-

- यह प्रयोगों द्वारा सत्यापित है कि किसी सतह से y दूरी पर एक layer पर shear stress सीधे कर्तन विकृति (shear strain) की दर के समानुपाती होती है या कोणीय विरूपण की दर के सीधे समानुपाती होता है।



$$\tau \propto \frac{d\theta}{dt}$$

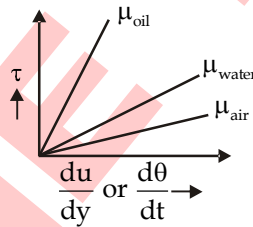
By definition

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{du}{dy}$$

$$\tau \propto \frac{du}{dy}$$

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

μ = नियतांक (सार्वत्रिक नियतांक नहीं) या श्यानता गुणांक या निरपेक्ष श्यानता या गतिक श्यानता



- curve का ढाल viscosity (μ) होता है। यह $\tau = \mu \frac{du}{dy}$ से पता चलता है।
- प्रवाह के साथ μ समान रहता है जैसे slope (ढाल) ज्यादा होगा तो श्यानता भी ज्यादा होगी।
- उपरोक्त डायग्राम से $\mu_{oil} > \mu_{water} > \mu_{air}$

Unit of viscosity (श्यानता की इकाई) (μ):-

Dynamic Viscosity (μ)

In SI

$$\frac{N}{m^2} \times \text{sec or Pa} \times \text{sec}$$

In MKS

$$\text{kg} \frac{m}{\text{sec}^2} \times \frac{1}{m^2} \times \text{sec}$$

$$\frac{\text{kg}}{m \times \text{sec}}$$

In CGS

$$1 \text{ CGS} = \frac{\text{gram}}{\text{cm} \times \text{sec}}$$

$$1 \text{ Poise} = \frac{\text{gram}}{\text{cm} \times \text{sec}} = \frac{1}{10} \frac{\text{kg}}{\text{m} \times \text{sec}} = \frac{1}{10} \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \times \text{sec} = 0.1 \text{ pa} - \text{sec}$$

Dimension :-

$$M^1 L^{-1} T^{-1}$$

Kinematic viscosity (ν) :-

- यह गतिज श्यानता तथा fluid के घनत्व का अनुपात होता है।
- इसको ν से दर्शाते हैं।

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

Unit of kinematic viscosity :-

In MKS

$$\frac{\text{kg} / \text{m} - \text{sec}}{\text{kg} / \text{m}^3} = \frac{\text{m}^2}{\text{sec}}$$

In CGS

$$1 \text{ CGS} = \frac{\text{cm}^2}{\text{sec}}$$

$$1 \text{ stoke} = \frac{\text{cm}^2}{\text{sec}} = \frac{1}{10^4} \frac{\text{m}^2}{\text{sec}}$$

Dimension :- $M^0 L^2 T^{-1}$

Effect of different conditions on viscosity of fluid

(Fluid की श्यानता पर विभिन्न ताप व दाब का प्रभाव)

1. For Dynamic Viscosity or Absolute viscosity (गतिज श्यानता या निरपेक्ष श्यानता पर प्रभाव) :-

(A) Effect of temperature (ताप का प्रभाव)

- **Liquids (द्रव) :-** द्रवों में श्यानता का मुख्य कारण ससंजक बल होता है। इसलिए जैसे ही तापमान increase करते हैं कणों के मध्य आकर्षण बल कम होने लगता है जिससे ससंजक बल कम होता है तथा श्यानता में भी कमी आती है।



• **Gases :-**

- गैसों में श्यानता का मुख्य कारण random motion होता है।

$$V_{rms} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

- इस प्रकार जैसे ही temp increase करते हैं तो गैसों के molecule के मध्य random motion increase हो जाता है जिसके परिणामस्वरूप श्यानता में वृद्धि होती है।

$$T \uparrow \Rightarrow \mu \uparrow$$

(B) Effect of pressure (दाब का प्रभाव) :-

- **Liquids (द्रव) :-** Liquids में दाब के प्रभाव से उसके ससंजक बल पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता है इसलिए liquids की श्यानता पर दाब का कोई प्रभाव नहीं पड़ता है। ($P \uparrow \Rightarrow \mu$ Remain same)
- **Gases :-**
- बॉयल के नियमानुसार $P \propto \frac{1}{V}$ या $PV = \text{constant}$
- इस प्रकार जब गैस पर दाब बढ़ाते हैं तो आयतन में कमी आती है तथा PV का मान नियत रहता है

$$V_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

$$PV = RT$$

$$= \sqrt{\frac{3PV}{M}} = \text{constant}$$

- इस प्रकार दाब बढ़ाने पर गैसों की random motion पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता है जिससे इनकी श्यानता पर भी कोई प्रभाव नहीं पड़ता है।

Note :-

- इस प्रकार गतिज श्यानता केवल तापमान का फलन होती है।

2. For Kinematic Viscosity (श्यानता के लिए) (ν)**(A) Effect of temperature**

- तापमान बढ़ाने पर द्रव के घनत्व पर कोई प्रभाव पड़ता है लेकिन श्यानता बढ़ने के कारण द्रव की kinematic viscosity बढ़ जाती है।
- गैसों में तापमान बढ़ाने पर घनत्व में कमी आती है तथा उनकी गतिज श्यानता में भी बढ़ोतरी होती है इस प्रकार $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ से तापमान बढ़ाने पर kinematic viscosity में ज्यादा बढ़ोतरी होती है ($T \uparrow \Rightarrow \nu \uparrow \uparrow$)

(B) Effect of pressure (दाब का प्रभाव)

- द्रवों में दाब बढ़ाने पर उसके घनत्व तथा गतिज श्यानता में कोई बदलाव नहीं होता है इसलिए इसकी kinematic viscosity भी दाब से अप्रभावित होती है।

$P \uparrow \Rightarrow \nu$ Remain same

- गैसों में दाब बढ़ाने पर उनका घनत्व बढ़ता है तथा उनकी गतिज श्यानता में कोई बदलाव नहीं होता है इस प्रकार $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ से
- दाब बढ़ाने पर गैसों की kinematic viscosity में कमी आती है।

Note :-

वायु की श्यानता 20°C ताप पर पानी की श्यानता से 15.2 गुना ज्यादा होती है।

Linearisation of Newton's law of viscosity

(न्यूटन के श्यानता के नियम का रैखिकरण) :-

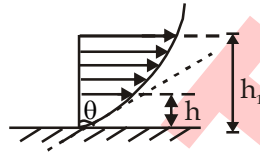
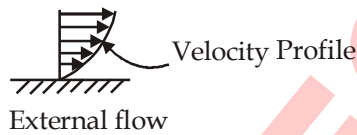
- न्यूटन के श्यानता के नियम के अनुसार

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

Shear stress at the wall is τ_w or τ_0

$$\tau_w = \mu \left. \frac{du}{dy} \right|_{Y=0}$$

u = velocity profile (variation of velocity)



$$\tau_w = \mu \left. \frac{du}{dy} \right|_{Y=0}$$

where

$$\left. \frac{du}{dy} \right|_{Y=0} = \text{Slope of tangent at } Y=0$$

So

$$\tan \theta = \frac{u}{h}$$

If θ is very small $\tan \theta \approx \theta$

$$\tau_w = \mu \theta$$

So

$$\theta = \frac{u}{h}$$

$\therefore$

$$\tau_w = \mu \frac{u}{h}$$

where u = Relative Velocity ($u - 0$)

h = Very small gap

Note :-

न्यूटन के श्यानता के नियम का रेखीकरण केवल बहुत कम दूरी (small gaps) तक ही लागू होता है।

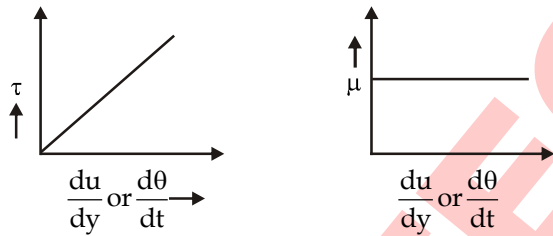
Newtonian Fluid (न्यूटनीय तरल) :-

- इसे तरल (fluid) जो न्यूटन के श्यानता के नियम का पालन करते हैं न्यूटनीय तरल कहलाते हैं।

$$\tau = \mu \left(\frac{du}{dy} \right)^n + B$$

- न्यूटनीय तरल के लिए $n = 1$ तथा $B = 0$ होता है।

$$\tau = \mu \left(\frac{du}{dy} \right)$$



उदाहरण :-

पानी, तेल, वायु इत्यादि तरल की श्यानता (μ), विरूपण की दर के साथ अपरिवर्तित होती है इसलिए ये fluids newtonian fluid कहलाते हैं।

Rheology :- तरल यान्त्रिकी की वह शाखा जिसमें fluid के flow के व्यवहार के आधार पर विभिन्न अन्यूटनीय तरल (non newtonian fluids) का अध्ययन किया जाता है।

Non-Newtonian Fluid :-

ऐसे fluid जो न्यूटन के श्यानता के नियम का पालन नहीं करते हैं।

Power law
$$\tau = A \left(\frac{du}{dy} \right)^n$$

Where

A = consistency Index

n = Flow Behaviour Index

$$\tau = \left[A \left(\frac{du}{dy} \right)^{n-1} \right] \frac{du}{dy}$$

↓
 μ_{apparent}

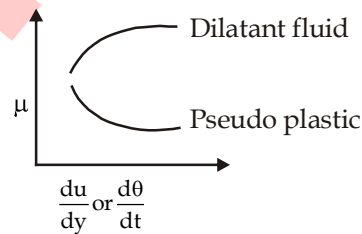
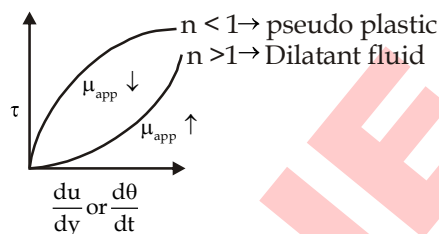
Slope = μ_{apparent}

Classification of non-newtonian fluids

- अन्यूटनीय तरल को मुख्यतया दो भागों में बांटा है।
 - (a) Purely viscous
 - (b) Visco elastic fluids
- Purely viscous fluid को भी यहां दो भागों में बांटा गया है।
 - (a) Time independent
 - (b) Time dependent
- (a) Time independent fluids or deformation dependent

$$\tau = A \left(\frac{du}{dy} \right)^n$$

$$\tau = \underbrace{\left[A \left(\frac{du}{dy} \right)^{n-1} \right]}_{\mu_{\text{apparent}}} \frac{du}{dy}$$



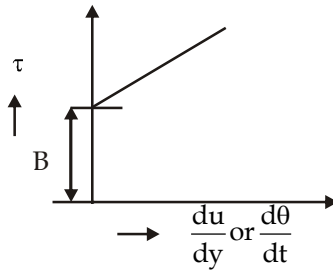
- Pseudo plastic fluid की apparent viscosity deformation के साथ घटती जाती है इसलिए इसको shear thinning fluid कहलाते हैं।
जैसे - दूध, रक्त, paper pulp and molasses
- Dilatant fluids की apparent viscosity deformation के साथ बढ़ती जाती है इसलिए इनको shear thickening fluid कहते हैं।
जैसे - शहद(honey), saturated solution of suger, starch solution

Bingham Plastic or Ideal Plastic Fluid:-

- ऐसे fluid जिनके प्रवाह के लिए कुछ न्यूनतम कर्तन प्रतिबल τ_y (yield stress) की आवश्यकता होती है bingham plastic or ideal plastic कहलाते हैं।
जैसे - दूध-पेस्ट gel, cream

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} + B$$

$$B = +ve$$



where B = Initial yield stress ($B \neq 0$)

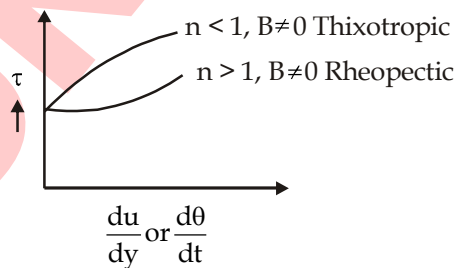
$$\tau = \left[A \left(\frac{du}{dy} \right)^{n-1} \right] \frac{du}{dy} + B$$

(b) Time dependent fluids

$$\tau = A \left(\frac{du}{dy} \right)^n + B$$

$$\tau = \left[A \left(\frac{du}{dy} \right)^{n-1} \right] \frac{du}{dy} + B$$

↓
 μ_{apparent}

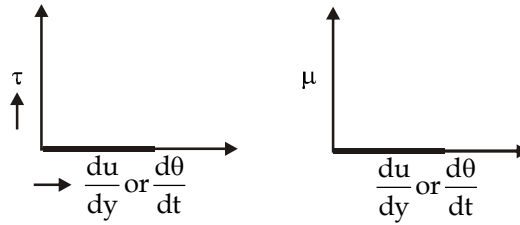


- Thixotropic fluids, constant applied shear stress पर समय के साथ उसकी apparent viscosity में कमी देखने को मिलती है।

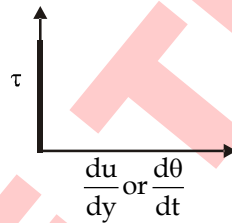
जैसे - प्रिन्टर की स्याही , Paints, Ink, कूड आयल इत्यादि।

- Rheopetic fluids, constant applied shear stress पर समय के साथ उसकी apparent viscosity में बढ़ोतरी (increases) देखने को मिलती है।

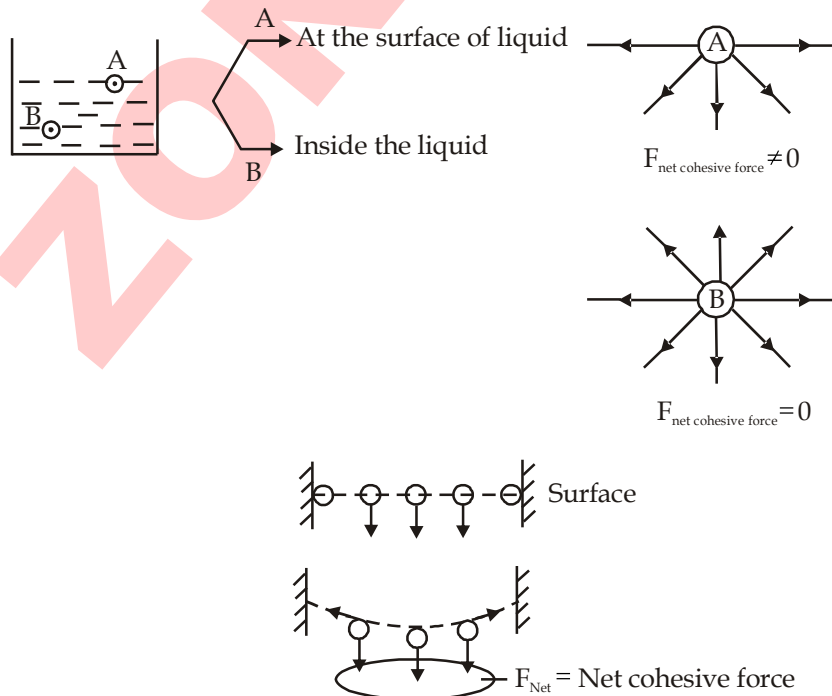
जैसे - जिप्सम पेस्ट

Ideal fluid:-

- घर्षण रहित (non -viscous) तथा असम्पीड्य (incompressible) तरल ही आदर्श तरल (ideal fluid) कहलाता है
 $\mu = 0$ Inviscid fluids $\Rightarrow$ viscous force = 0 $\Rightarrow$ cohesive force = 0
- एक आदर्श तरल में किसी प्रकार का पृष्ठ तनाव नहीं होता है तथा वह असम्पीड्य (incompressible) होता है
- वास्तविक तौर पर कोई भी आदर्श तरल नहीं होता है
- हालांकि fluid जैसे - वायु पानी की श्यानता बहुत ही कम होती है इसलिए सभी practical purpose में इनको आदर्श तरल माना जाता है।

Ideal solids (आदर्श ठोस) :-**Surface Tension (पृष्ठ तनाव) (σ):-**

- द्रव की सतह पर इकाई लम्बाई पर लगने वाला सतह के लम्बवत नीचे की ओर बल पृष्ठ तनाव कहलाता है।
- यह तनन झिल्ली की तरह कार्य करता है।



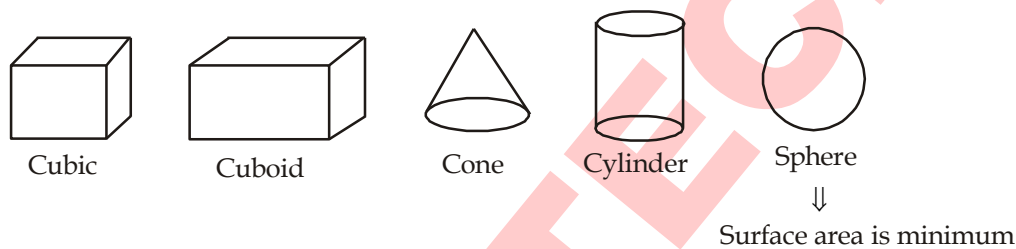
Mathematically:-

$$\sigma = \frac{F}{l}$$

$$\sigma_{H_2O} = 0.073 \text{ N/m} = \frac{1}{15} \text{ th of } 1\text{N} \rightarrow \text{Air water interface}$$

$$\sigma_{Hg} = 0.48 \text{ N/m} \rightarrow \text{Air-Mercury Interface}$$

- पृष्ठ तनाव आन्तरिक बल होता है तथा पृष्ठ तनाव का कारण संसर्जक बल होता है।
- Net downward force के परिणाम स्वरूप liquid की सतह पर एक खिंचाव बल लगता है जिसके कारण सतह में curvature आ जाता है। जो सतह में एक प्रकार का तनाव पैदा करता है जो किसी तनी हुई झिल्ली में तनाव के समान है
- जैसे ही तापमान increase करते हैं पृष्ठ तनाव घटता है तथा दाब का प्रभाव पृष्ठ तनाव पर नगण्य होता है।

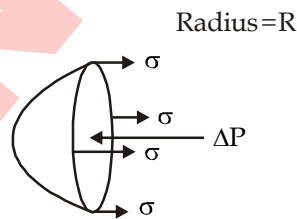


- नियत आयतन के लिए गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल न्यूनतम होता है।

परिभाषा -

पृष्ठ तनाव द्रव का वह गुणधर्म है जो पृष्ठीय क्षेत्रफल को न्यूनतम करने की चेष्टा करता है।

- (1) Pressure inside a droplet of liquid (द्रव की बूंद के अन्दर दाब आधिक्य) :-**
Water drop:-

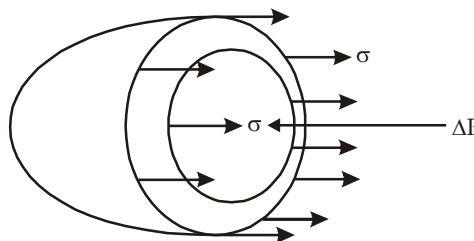


क्षैतिज दिशा में बलों का सन्तुलन करने पर

$$\sigma(2\pi R) = \Delta P(\pi R^2)$$

$$\Delta P = \frac{2\sigma}{R} \text{ या } \frac{4\sigma}{D}$$

- (2) Pressure inside soap bubble (साबुन के बुलबुले में दाब आधिक्य) :-**

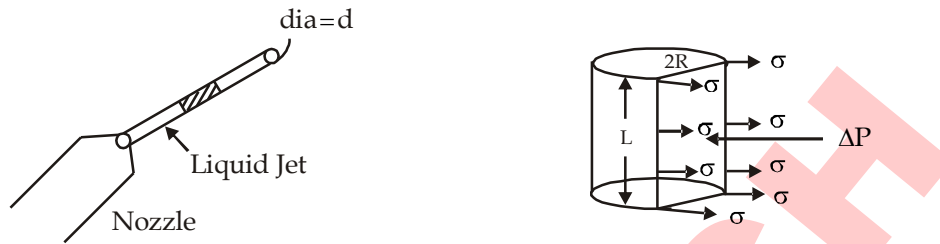


- साबुन के बुलबुले में दो interface होती है एक साबुन की film के बाहर और दूसरी अन्दर की ओर इसलिए
Hence

$$\sigma(2\pi R) + \sigma(2\pi R) = \Delta P(\pi R^2)$$

$$\Delta P = \frac{4\sigma}{R} \text{ या } \frac{8\sigma}{D}$$

(3) Pressure inside liquid jet or jet of water (liquid jet या jet of water के अन्दर दाब आधिक्य) :-



$$\sigma(L) + \sigma(L) = \Delta P(2RL)$$

$$\sigma(2L) = \Delta P(2RL)$$

$$\Delta P = \frac{\sigma}{R} \text{ या } \frac{2\sigma}{D}$$

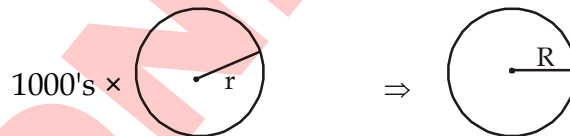
Surface Energy (पृष्ठीय ऊर्जा) :-

- सतह को बनाने में किया गया कार्य ऊर्जा के रूप में store होती है इसी store energy को surface energy कहते हैं।

$$E = \sigma A \quad A \rightarrow \text{surface area}$$

$$\sigma = \frac{E}{A}$$

इस equation से surface tension की नई unit निकल के आती है जो कि जूल/मी.² है।



Small drop

Big drop

$$1000 \times \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi R^3$$

$$10r = R$$

$$E_1 = 1000 \times \sigma \times 4\pi r^2$$

$$E_1 = 4000 \sigma \pi r^2$$

$$E_2 = \sigma (4\pi R^2) = \sigma [4\pi (10r)^2]$$

$$E_2 = 400 \pi r^2 \sigma$$

$$E_1 - E_2 = 3600 \sigma \pi r^2$$

$$E_1 > E_2$$

.....(i)

....(ii)

Note :-

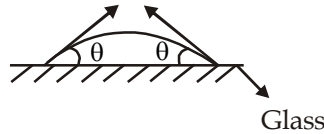
- एक द्रव की बून्द का आकार गोलाकार हो जाता है क्योंकि गोले का दिये गये आयतन में पृष्ठीय क्षेत्रफल न्यूनतम होता है जिससे surface energy भी न्यूनतम होती है। और minimum surface energy वाली अवस्था ज्यादा stable होती है। इस प्रकार द्रव की बून्द का आकार गोल हो जाता है।

Wetting and non wetting surfaces

1. liquid के अणु आपस में आकर्षण बल के कारण आपस में जुड़े रहते हैं जिसे संसर्जक बल (cohesive force) कहते हैं।
2. अलग अणुओं के मध्य लगने वाला आकर्षण बल आसंजक बल कहलाता है।

Case I :- Wetting surface

Adhesive force >>>> Cohesive force:-



If $\theta < 90^\circ$

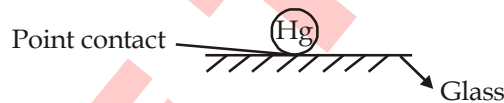
$\theta \rightarrow$ Angle of contact

For clean water $\Rightarrow \theta = 0^\circ$

Liquid wets solid surface

Case II :- Non wetting surface

Adhesive force <<< Cohesive force



$\theta = [130-140^\circ]$ for Hg

If $\theta > 90^\circ$ Liquid does not wet the surface



wetting तथा non wetting liquid के साथ साथ surface tension दोनों का शामिल गुणधर्म है।

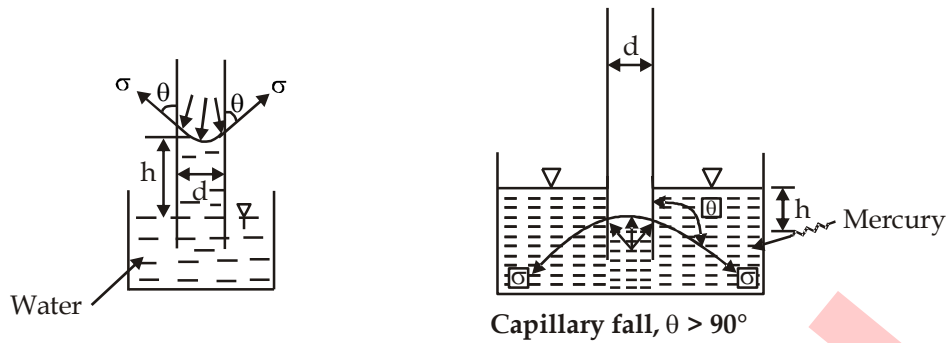
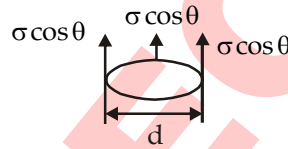
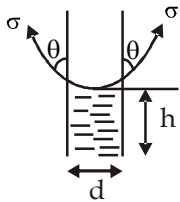
अलग अलग interface के लिए contact angle

- (1) Water-glass = 0°
- (2) Mercury-glass = 130°
- (3) Kerosene-glass = 26°

Capillary Effect or capillarity

(केशिकत्व तथा केशिकत्व प्रभाव)

- बहुत पतले व्यास की ट्यूब जिसका व्यास 1cm से भी कम हो केशिकत्व नली कहलाती है।
- जब एक ट्यूब जिसका व्यास बहुत कम होता है (केशिकत्व नली) को एक द्रव के बड़े reservoir में डाला जाता है तो capillary tube में द्रव का स्तर कम या ज्यादा हो जाता है इसी प्रभाव को केशिकत्व प्रभाव या केशिकत्व कहते हैं।
- Capillary tube में liquid का स्तर गिरना या चढ़ना पृष्ठ तनाव की दिशा पर निर्भर करता है तथा पृष्ठ तनाव द्रव तथा सतह के व्यवहार पर निर्भर करता है।

(a) Capillary rise, $\theta < 90^\circ$ (b) Capillary depression, $\theta > 90^\circ$ 

ऊर्ध्वाधर दिशा में बलों का सन्तुलन करने पर-

$$\sigma \cos \theta (2\pi R) = \text{द्रव का भार}$$

$$\sigma \cos \theta (2\pi R) = mg$$

$$= \rho v g$$

$$(\sigma \cos \theta) (2\pi R) = \rho [\pi R^2 \times h] g$$

$$2\sigma \cos \theta = \rho g h R$$

$\Rightarrow$

$$h = \frac{2\sigma \cos \theta}{\rho g R} \text{ or } \frac{4\sigma \cos \theta}{\rho g d}$$

θ = liquid तथा glass के मध्य Angle of contact

where

d = glass tube का व्यास खुले सिरे की तरफ

h = tube में liquid की ऊँचाई

σ = surface tension of liquid

Note :-

- capillary rise (केशिकत्व उठान) tube के व्यास के व्युत्क्रमानुपाती होती है।
- tube का व्यास जिसका मान 1cm से ज्यादा हो उसमें केशिकत्व प्रभाव नगण्य होता है।
- जब दाब का मापन मेनोमीटर या बेरोमीटर से किया जाता है तब केशिकत्व प्रभाव को खत्म (avoid) करने के लिए tube का व्यास 10mm से ज्यादा रखते हैं।

Note:-

Angle of contact				
1. $\theta < 90^\circ$	Cohesion < Adhesion	Liquid wets solid surface	Top surface of water is concave	Liquid rise in the capillary tube
2. $\theta > 90^\circ$	Cohesion > Adhesion	Liquid does not wet the surface	Top surface of water is convex	Liquid falls in the capillary tube

Capillary tube में liquid के rise को प्रभावित करने वाले कारक :-

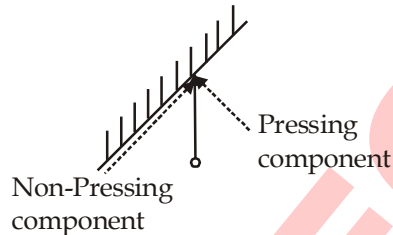
- (1) Liquid का विशिष्ट भार
- (2) Tube का व्यास
- (3) Liquid का पृष्ठ तनाव
- (4) Angle of Inclination (Angle of contact)

CHAPTER - 2

(FLUID PRESSURE AND ITS MEASUREMENT)

Pressure:-

तरल के इकाई क्षेत्रफल पर लगने वाला लम्बवत बल दाब कहलाता है।

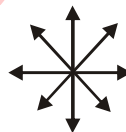


Mathematically:-

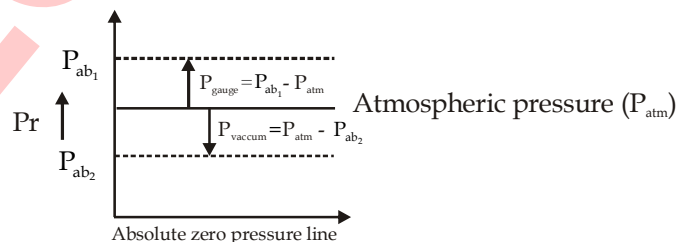
$$\sigma = \frac{F}{A}$$

F = External Normal Force or External Thrust or Pressure force

Pressure is a scalar quantity.



Different types of pressure:-



(1) Atmospheric Pressure:-

यह वायुमण्डल द्वारा लगाया गया दाब होता है।

समुद्र level पर इसका मान 1.013 bar होता है। यह barometer द्वारा मापा जाता है समुद्री level पर यह पानी के 10.3 m head तथा पारे के 76 cm head के बराबर होता है।

(2) Absolute pressure:-

- यह zero pressure level से ऊपर मापा गया net pressure होता है।
- इसका मापन Aneroid barometer से किया जाता है।

(3) Gauge Pressure:-

- यह वायुमण्डलीय दाब से ऊपर के मान का दाब होता है।
- यह manometer या Bourden gauge द्वारा से मापा जाता है।

(4) Vacuum pressure:-

- यह वायुमण्डलीय दाब से कम मान का दाब होता है।

$$P_{\text{abs}} = P_{\text{gauge}} + P_{\text{atm}}$$

$$P_{\text{vacuum}} = P_{\text{atm}} - P_{\text{abs}}$$

(-ve) P_{vacuum} is called negative pressure.

Unit of Pressure:-

- (1) SI:- N/m^2
- (2) Pascal:- $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$
- (3) Atm:- $1 \text{ Atm} = 101325 \text{ Pa} = 1.01325 \times 10^5 \text{ Pa}$
- (4) Bar:- $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$
- (5) Kgf/cm^2 :- $1 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2} = \frac{9.81 \text{ N}}{10^{-4} \text{ m}^2} = 9.81 \times 10^4 \text{ N/m}^2$

$$\text{Atm} > \text{bar} > \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}$$

- (6) psi:- Pound force per square inch

$$1 \text{ psi} = \frac{1 \text{ lbf}}{\text{inch}^2} = \frac{0.4536 \text{ kgf}}{(2.54)^2 \text{ cm}^2}$$

$$1 \text{ psi} = \frac{0.4536}{(2.54)^2} \times 9.81 \times 10^4 \text{ N/m}^2$$

$$1 \text{ psi} = 6894.76 \text{ Pa}$$

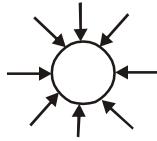
$$1 \text{ Atm} = 101325 \text{ Pa}$$

$$1 \text{ Atm} = 14.696 \text{ psi}$$

psi pressure की ही unit है इसकी सहायता से वाहन के टायर में हवा के pressure को मापा जाता है।

Pascal's law :- स्थिर तरल में किसी बिन्दू पर लगने वाला दाब या दाब की तीव्रता सभी दिशाओं में समान होती है। तरल पर लगने वाला बाहरी स्थिर दाब समान रूप से तरल में विभाजित हो जाता है।

समान ऊँचाई पर स्थिर तरल में दो बिन्दू पर दाब की तीव्रता समान होती है।

Pressure at a point:-

- स्थिर तरल में किसी बिन्दू पर लगने वाली दाब की मात्रा सभी दिशाओं में समान होती है। (पास्कल के नियम से drive किया गया)
- तरल जब स्थिर अवस्था में हो तो यह सम्पर्क सतह पर लम्बवत रूप से बल लगाता है।
- जब तरल किसी सतह पर स्पर्शीय रूप से बल लगाता है तो सतह भी तरल पर स्पर्शीय बल लगाती है।
- दाब एक अदिश राशि है इसकी मात्रा होती है लेकिन इसकी कोई दिशा नहीं होती है।

रूके हुए fluid में किसी बिन्दू पर दाब या द्रव-स्थैतिक दाब

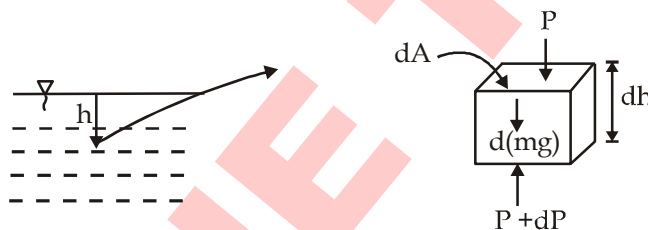
(Pressure at a certain point in static fluid or Hydro-static pressure)

चित्र में दिखाये अनुसार तरल के एक छोटे अवयव की कल्पना करें -

$dA \rightarrow$ Cross section area of fluid element

$dh \rightarrow$ Height of fluid element

$h \rightarrow$ Distance of fluid element from free surface



Force balancing in vertical direction

$$PdA - (P + dP)dA + dm g = 0$$

Because fluid is stationary (without any motion)

$$- dPdA = - d(mg)$$

$$dPdA = \rho dv g \quad \{dv = dA dh\}$$

$$dPdA = \rho dA dh g$$

$$\frac{dP}{dh} = \rho g$$

where $\frac{dP}{dh}$ = Pressure gradient in downward direction

Integrate it

$$\int_0^P dP = \int_0^h \rho g dh$$

$$P = \rho gh \quad P = f(h)$$

$$\frac{dP}{dh} = +\rho g \text{ for downward direction}$$

$$\frac{dP}{dh} = -\rho g \text{ for upward direction}$$

Case 1:- For incompressible fluid:-

$$\rho = \text{constant}$$

$$\frac{dP}{dh} = \rho g$$

$$dP \propto dz \rightarrow \text{Linear relation}$$

$$P = \rho g z$$

Case 2:- For compressible fluid:-

$$\rho \text{ is not constant}$$

$$\frac{dP}{dh} = \rho g \quad \therefore PV = MRT$$

$$\frac{dP}{dh} = \frac{P}{RT} g \quad \therefore \rho = \frac{P}{RT}$$

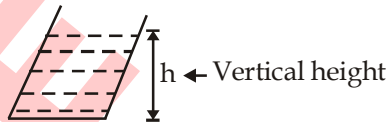
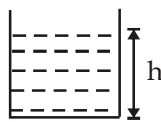
$$\int_{P_{\text{atm}}}^{P_{\text{abs}}} \frac{dP}{P} = \int_0^h \frac{g}{RT} dh \Rightarrow \ln \left[\frac{P_{\text{abs}}}{P_{\text{atm}}} \right] = \frac{g}{RT} h$$

$$P_{\text{abs}} = P_{\text{atm}} e^{\left[\frac{g}{RT} h \right]}$$

Note:-

स्थिर असम्पीड्य तरल के लिए गहराई के साथ दाब, रेखीय रूप से बढ़ता है और ऊँचाई के साथ दाब, रेखीय रूप से घटता है लेकिन सम्पीड्य तरल के लिए दाब घातांकीय रूप से बदलता है।

Hydrostatic law :- किसी बिन्दू पर ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर दाब के बढ़ने की दर तरल के विशिष्ट भार के बराबर होनी चाहिए।

Pressure in terms of liquid column height**For H₂O:-**

$$P = \rho_w g h$$

$$1 \text{ atm} = 10^3 \times 9.81 \times h$$

$$101325 = 10^3 \times 9.81 \times h$$

$$h = 10.3 \text{ m of H}_2\text{O}$$

For Hg:-

$$P = \rho_{\text{Hg}} g h$$

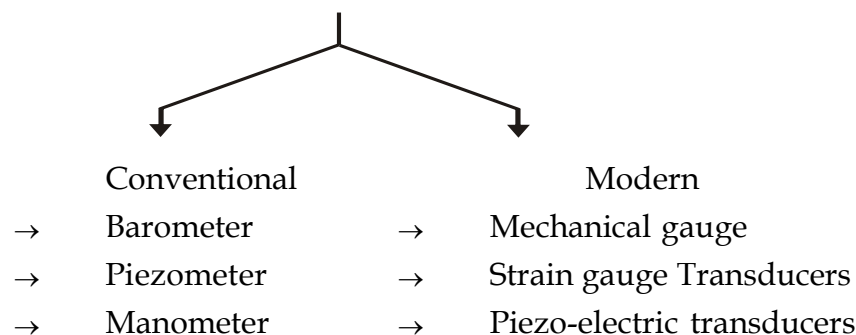
$$1 \text{ atm} = 13.6 \times 10^3 \times 9.81 \times h$$

$$101325 = 13.6 \times 10^3 \times 9.81 \times h$$

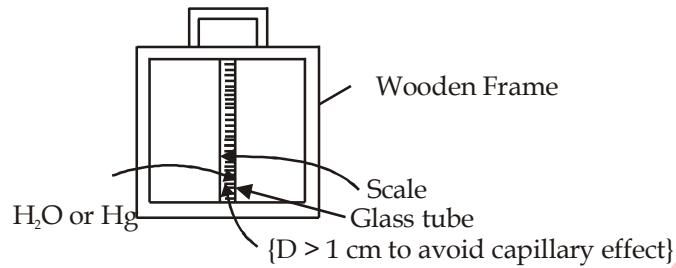
$$h = 760 \text{ mm of Hg}$$

Torricelli

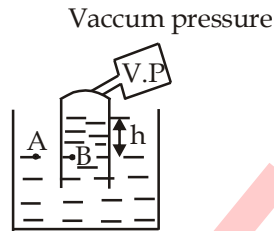
$$1 \text{ Torr} = 1 \text{ mm of Hg} = 133.3 \text{ Pa}$$

Pressure Measurement

Barometer :- इसका उपयोग सामान्य वायुमण्डलीय दाब के मापन में किया जाता है।



Construction



$$P_A = P_B$$

$$P_A = \rho_{Hg}gh + P_{Hg \text{ vapour}}$$

$$P_{Atm} = \rho_{Hg}gh \quad \therefore P_{Hg \text{ vapour}} \approx 0$$

In case of water

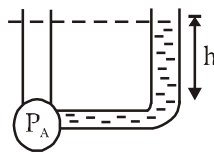
$$P_{atm} = \rho_{H_2O}gh + P_{H_2O \text{ vapour}} \rightarrow 2.7 \text{ m of } H_2O$$

Note :-

हम mercury (Hg) का उपयोग इसके उच्च घनत्व तथा निम्न वाष्प दाब होने के कारण करते हैं।

Piezometer

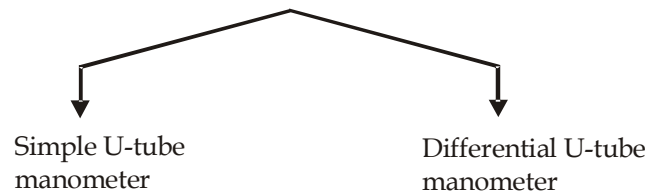
$$P_A = \rho gh$$



- यह द्रव के लिए ही उपयोग किया जाता है।
- निम्न गैज दाब मापन के लिए उपयोग किया जाता है।
- स्वतंत्र सतह नहीं होने के कारण Piezometer द्वारा गैसों का मापन नहीं किया जा सकता।
- Piezometer द्वारा ऋणात्मक दाब का मापन नहीं किया जा सकता।

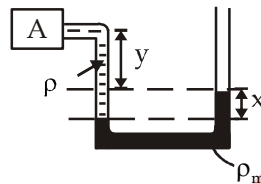
Manometer :- Manometer का उपयोग निम्न, मध्यम तथा उच्च गैज दाब के साथ-साथ vacume pressure द्रव तथा गैस दोनों का मापन किया जाता है।

- Manometers इस प्रकार का उपकरण है जिसका उपयोग तरल के किसी बिन्दू पर एक जैसे या अलग तरल के कॉलम को balance करके दाब का मापन किया जाता है।
- Manometer में उपयोग लिया गया अतिरिक्त तरल manometric fluid कहलाता है।
- Liquid column balance के सिद्धान्त पर manometer कार्य करते हैं।
- Manometric fluid का पृष्ठ तनाव ज्यादा होता है।



Simple U-tube manometer :- साधारण U-tube manometer में एक glass की tube होती है जिसका एक सिरा उस बिन्दू पर होता है जहां दाब मापना होता है तथा दूसरा सिरा वायुमण्डल में खुला होता है तथा यह U आकार की होती है।

For Gauge pressure:-



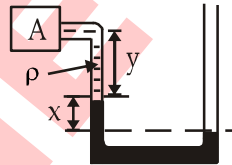
ρ_m = Density of manometric fluid

$$P_A + \rho g (x + y) = \rho_m g x$$

$$P_A = \rho_m g x - \rho g (x + y)$$

$$P_A = +ve \text{ (pressure is high side of A)}$$

For Vacuum pressure:-



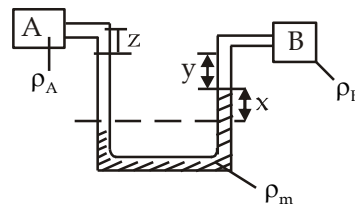
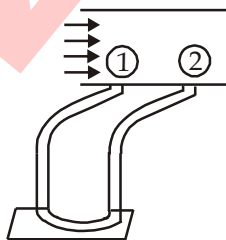
$$P_A + \rho g y + \rho_m g x = 0$$

$$P_A = - (\rho g y + \rho_m g x)$$

$$P_A = -ve$$

Differential U-tube manometer:-

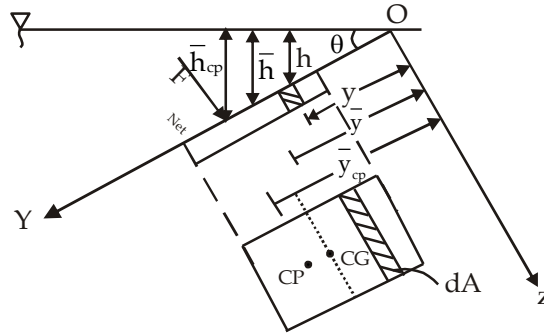
इन manometers का उपयोग दो बिन्दुओं के मध्य दाब का अन्तर ज्ञात करने के लिए किया जाता है।



$$P_A + \rho_A g (x + y + z) = P_B + \rho_B g y + \rho_m g x$$

$$P_A + \rho_A g (x + y + z) - \rho_B g y - \rho_m g x = P_B$$

$$P_A - P_B = \rho_B g y + \rho_m g x - \rho_A g (x + y + z)$$

Pressure force on inclined surface:-

Let us consider a plane surface inclined at an angle θ with the horizontal.

A = Total area of the surface

$\bar{h}$ = Depth of C.G. of inclined area from free surface

h^* or $\bar{h}_{cp}$ = Distance of centre of pressure from free surface of liquid

θ = Angle made by the plane of the surface with free liquid surface

$\bar{y}$ = Distance of C.G. of the inclined surface from O-Z

y^* or $\bar{y}_{cp}$ = Distance of the centre of pressure from O-Z

$$P = \rho gh$$

$$dF = PdA$$

$$dF = \rho gh dA$$

Integrate it

$$F = \int \rho gh dA = \rho g \int h dA \quad \because h = y \sin \theta$$

$$= \rho g \int y \sin \theta dA$$

$$F = \rho g \sin \theta \int y dA \quad \because \int y dA = Ay_1 + Ay_2 + \dots = A\bar{y}$$

$$F = \rho g \sin \theta \bar{y} A \quad \because \bar{h} = \bar{y} \sin \theta$$

$$F = \rho g \bar{h} A = F_{\text{Net}}$$

Location of Total pressure force:-

Taking moment about O

$$F_{\text{net}} \cdot \bar{y}_{cp} = \int dF \cdot y$$

$$= \int p dA \cdot y$$

$$= \int \rho gh dA \cdot y$$

$$\rho g \bar{h} A \frac{\bar{h}_{cp}}{\sin \theta} = \rho g \int y^2 \sin \theta dA \quad \left(\because \bar{y}_{cp} = \frac{\bar{h}_{cp}}{\sin \theta} \right)$$

$$\bar{h} A \frac{\bar{h}_{cp}}{\sin \theta} = \sin \theta \int y^2 dA$$

$$\bar{h}_{cp} = \frac{\sin^2 \theta}{\bar{h} A} I_{xx}$$

By using parallel axis theorem

$$= \frac{\sin^2 \theta}{\bar{h}A} \left[I_{Gxx} + A \frac{\bar{h}^2}{\sin^2 \theta} \right] \quad \left(\because \bar{y} = \frac{\bar{h}}{\sin \theta} \right)$$

$$\bar{h}_{cp} = \frac{I_{Gxx} \times \sin^2 \theta}{\bar{h}A} + \bar{h}$$

For horizontal surface $\theta = 0$

$$\bar{h}_{cp} = \bar{h}, \quad F_{\text{gauge}} = \rho g \bar{h}A$$

For vertical surface $\theta = 90^\circ$

$$\bar{h}_{cp} = \bar{h} + \frac{\bar{I}_{Gxx}}{\bar{h}A}$$

Physical significance of $\bar{h}$ and $\bar{h}_{cp}$:-

(i)
$$\bar{h}_{cp} = \bar{h} + \frac{\bar{I}_{Gxx} \times \sin^2 \theta}{\bar{h}A}$$

$\frac{\bar{I}_{Gxx} \times \sin^2 \theta}{\bar{h}A}$ हमेशा धनात्मक होगा इसलिए $\bar{h}_{cp}$ हमेशा $\bar{h}$ से बड़ा होगा, इसका मतलब यह हुआ कि दाब केन्द्र (C_p) हमेशा गुरुत्व केन्द्र (G) से नीचे होगा।

(ii)
$$\bar{h}_{cp} = \bar{h} + \frac{\bar{I}_{Gxx} \times \sin^2 \theta}{\bar{h}A}$$

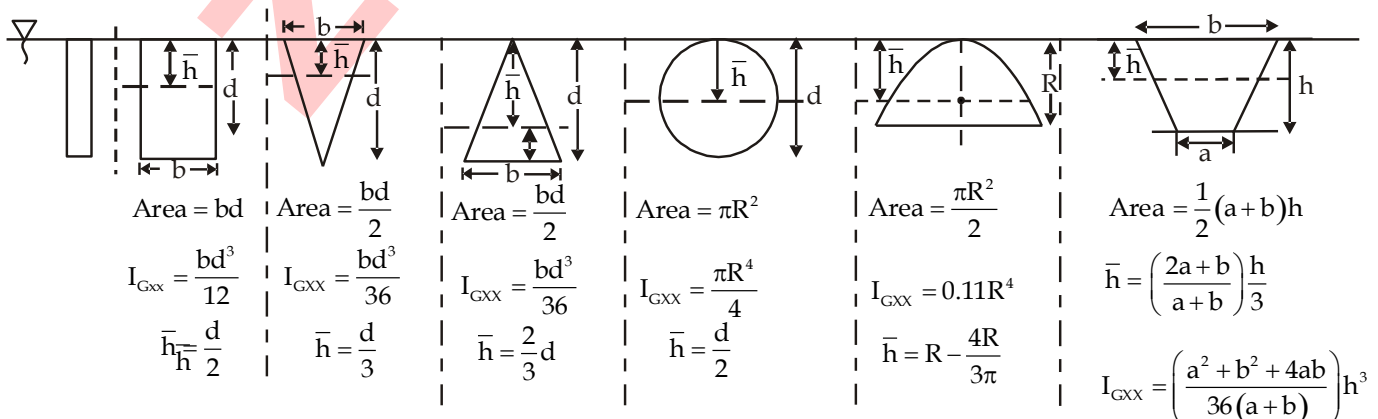
$$\bar{h}_{cp} - \bar{h} = \frac{\bar{I}_{Gxx} \times \sin^2 \theta}{\bar{h}A}$$

$$(\bar{h}_{cp} - \bar{h}) \propto \frac{1}{\bar{h}} \Rightarrow \text{if } \bar{h} \uparrow \Rightarrow (\bar{h}_{cp} - \bar{h}) \downarrow$$

जैसे-जैसे गहराई ($\bar{h}$) बढ़ायेगे, $\frac{\bar{I}_{Gxx} \sin^2 \theta}{\bar{h}A}$ का मान घटेगा इसका मतलब यह हुआ कि जैसे-जैसे गहराई बढ़ायेगें दाब केन्द्र (C_p), गुरुत्व केन्द्र (G) की ओर खीसकना शुरू हो जायेगा।

Centre of pressure :- Surface पर लगने वाले कुल दाब का केन्द्र Centre of pressure कहलाता है।

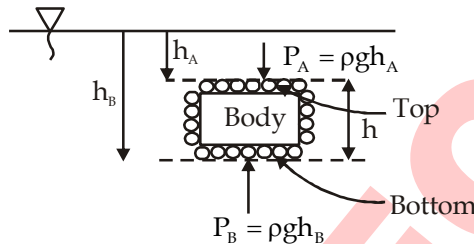
Different Shapes:-



CHAPTER - 3

(BUOYANCY AND FLOATATION)

Hydro-static force on a body or Buoyant force
 किसी वस्तु पर Hydro-static force या उत्प्लावक बल



Body की top surface पर बल $= P_A A$ ($A = \text{Area}$)

Body की bottom surface पर बल $= P_B A$

Body पर upward direction में लगने वाला net force या (Buoyancy force) $= (P_B - P_A) A$

$$= (\rho g h_B - \rho g h_A) A$$

$$= \rho g A (h_B - h_A)$$

$$= \rho g h A$$

$$= \rho g V_{\text{Displaced}}$$

$$= \rho V_{\text{Displaced}} g$$

$$(\rho V_{\text{Displaced}} = \text{Mass of displaced fluid})$$

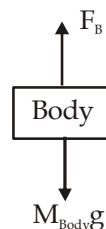
$$= mg \Rightarrow \text{weight of the displaced fluid}$$

(Buoyancy Force = Net upward force = weight of liquid displaced = Upthrust)

Archimede's Principle (आर्कमिडीज का सिद्धान्त) :-

जब किसी body को fluid के अन्दर आंशिक रूप से या पूरी तरह डुबाया जाता है तो fluid द्वारा body पर ऊर्ध्वाधर ऊपर की तरफ बल लगाया जाता है। यह बल upthrust या उत्प्लावक बल कहलाता है तथा इस बल की मात्रा बाहर निकाले गये द्रव के भार के बराबर होती है।

Force Analysis:-

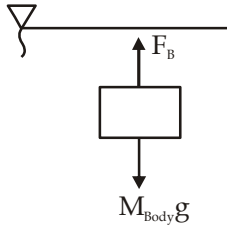


Upthrust $\Rightarrow F_B$

Down thrust $\Rightarrow M_{\text{Body}}g$

Different cases:-

Case I:- Submerged body



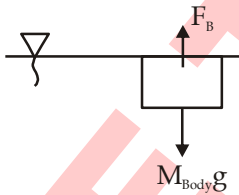
$$M_{\text{Body}}g = F_B$$

$$\rho_{\text{Body}} V_{\text{Body}}g = \rho V_{\text{Displaced}}g$$

$$\rho_{\text{Body}} = \rho_{\text{Fluid}} \quad | \quad V_{\text{Displaced}} = V_{\text{Body}}$$

Relative density = 1

Case II:- Floating Bodies:-



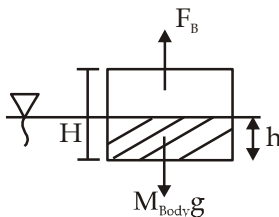
(a) $M_{\text{Body}}g = F_B$

$$\rho_{\text{Body}} V_{\text{Body}}g = \rho V_{\text{Displaced}}g$$

$$\rho_{\text{Body}} = \rho_{\text{Fluid}} \quad (\because V_{\text{body}} = V_{\text{displaced}})$$

Relative density = 1

(b) $M_{\text{Body}}g = F_B$



$$\rho_{\text{Body}} V_{\text{Body}}g = \rho V_{\text{Displaced}}g$$

$$R.D = \frac{V_{\text{Displaced}}}{V_{\text{Body}}}$$

$$\text{Relative density} < 1 \quad (\because V_{\text{displaced}} < V_{\text{body}})$$

Condition of floatation, relative density ≤ 1

Depth of Immergence:-

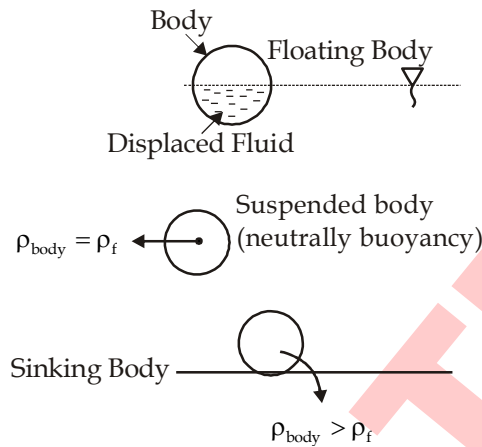
$$h = ?$$

$$\rho_{\text{Body}} V_{\text{Body}} = \rho V_{\text{Displaced}}$$

$$\rho_{\text{Body}} AH = \rho Ah$$

$$\rho_{\text{Body}} H = \rho h$$

$$\text{Relative density} = \frac{h}{H}$$

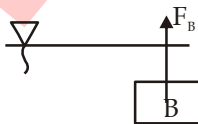
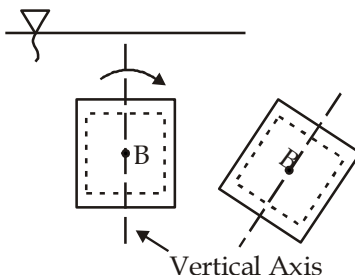
Note:-

$$\rho_{\text{Body}} = \rho, \quad \rho_f \rightarrow \text{Fluid Density}$$

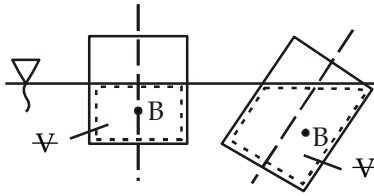
नियत घनत्व वाले fluid में पूरी तरह डूबी हुई वस्तु के लिए Buoyancy force, fluid की free surface से गहराई पर निर्भर नहीं करता है तथा यह solid body के घनत्व पर भी निर्भर नहीं करता है।

Center of Buoyancy:-

- यह वह बिन्दू होता है जिस पर buoyancy force कार्य करता है।
- यह displaced fluid का गुरुत्व केन्द्र होता है।

**Effect of disturbance on center of buoyancy (B):-****Center of buoyancy पर disturbance का प्रभाव (B):-****Case I:- Submerged Body:-**

Case II:- Floating body



Note:-

Submerged body में जब थोड़ा सा disturbance किया जाता तो center of buoyancy ऊर्ध्वाधर अक्ष में ही बना रहता है जबकि floating body में थोड़ा सा disturbance किया जाता है तो इसका center of buoyancy, vertical axis से दूर shift हो जाता है।

Stability

Stable Equilibrium :- जब body को original position से displaced की जाती है तथा वह वापस original position में आ जाये तो यह stable equilibrium कहलाती है।



Neutral Equilibrium :- जब body को original position से displaced किया जात है तथा यह अपनी नई position में बनी रहे तो यह neutral equilibrium कहलाती है।



Unstable Equilibrium:- जब body को original position से displaced किया जाता है तथा यह लगातार move होती रहती है। यह unstable equilibrium कहलाती है।



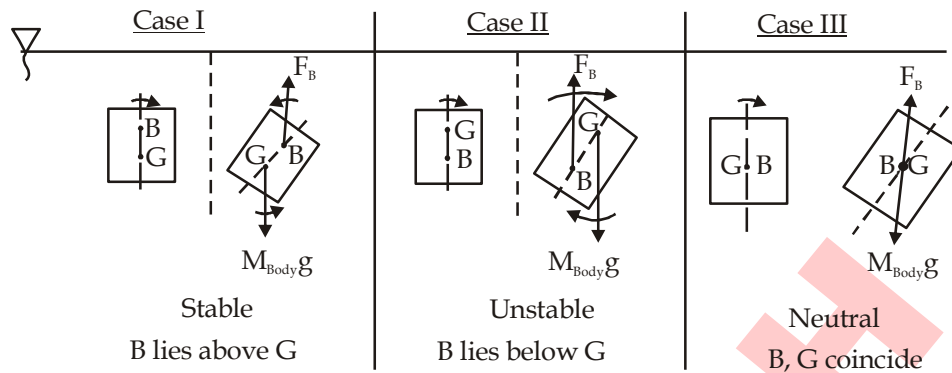
$$\text{Time of oscillation} \propto \frac{1}{\text{Stability}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R^2}{g(GM)}}$$

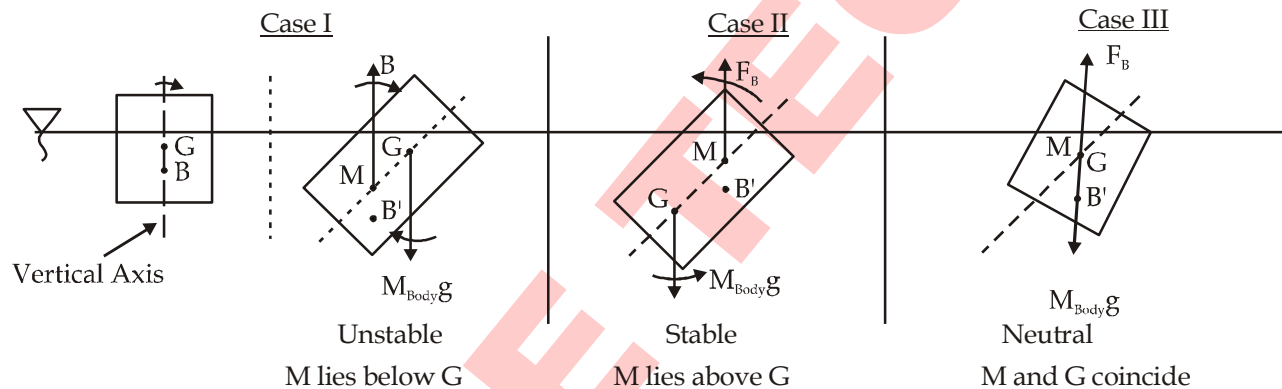
R = Radius of Gyration

GM = Metacentric Height

Stability of submerged body:-



Stability of Floating body:-



Metacenter (M) :- यह body की vertical axis पर वह बिन्दू है जहां body की vertical axis तथा Boyant force की क्रिया रेखा आपस में काटती है।

- Metacenter, body के बाहर या अन्दर कही भी हो सकता है।
- यह वह point होता है जिसके सापेक्ष body दोलन करती है।

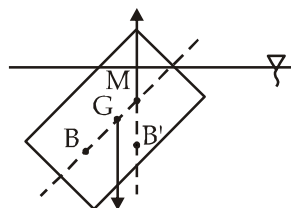
Metacentric Height (GM):-

यह center of gravity से metacenter के मध्य दूरी है।

$$GM = +ve \rightarrow \text{Stable}$$

$$GM = 0 \rightarrow \text{Neutral}$$

$$GM = -ve \rightarrow \text{Unstable}$$



GM = Metacentric height

In general

$$GM = BM - BG$$

$$GM = \frac{I}{V_{\text{Displaced}}} - BG$$

जहाँ I = Fluid की free surface द्वारा काटा गया body के क्षेत्रफल का MOI है।

Note:-

• M above G • $BM > BG$ • $GM = MB - BG = +ve$	Stable Equilibrium
• M below G • $BM < BG$ • $GM = BM - BG = -ve$	Unstable Equilibrium
• M at G • $GM = 0$	Neutral Equilibrium

Metacentric height

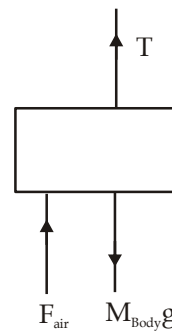
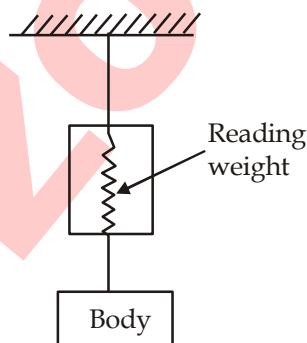
For (1) Passenger ship = (0.4 - 1.0) m

(2) War ship = (1.2 - 1.8) m

Real and Apparent weight

(वास्तविक तथा आभासी भार) :-

Real weight (वास्तविक भार) :- किसी body का वायु में मापा गया भार real weight कहलाता है।

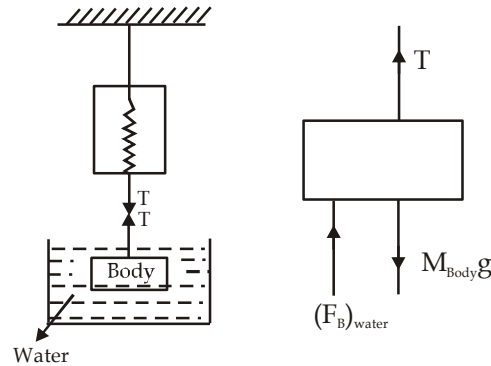


$$T + F_b = M_{\text{body}} \times g$$

Since F_b air is zero due to low density

$$T = M_{\text{body}} g$$

Apparent weight (आभासी भार) :- वायु में छोड़कर अन्य किसी fluid में मापा गया किसी body का भार apparent weight कहलाता है।



$$T + (F_B)_{\text{water}} = M_{\text{Body}} g$$

$$\text{Apparent weight} = \text{Real weight} - (F_B)_{\text{water}}$$

$$\text{Buoyancy force} = \text{Real weight} - \text{Apparent weight}$$

Condition of weightlessness

$$T = 0$$

$$\text{So real weight} = F_{B \text{ water}}$$

$$\rho_b V_b g = \rho_{\text{disp}} V_{\text{disp}} g$$

$$\text{Relative density} = \frac{V_{\text{displaced}}}{V_{\text{body}}}$$

CHAPTER - 4

(FLUID KINEMATICS)

शुद्ध तरल गतिकी (Fluid kinematics), fluid mechanics की वह शाखा है जिसमें fluid particles की गति का अध्ययन उस बल को consider किये बिना किया जाता है जिसके कारण fluid particles में गति होती है।

Different types of flows in fluid system (Fluid system में विभिन्न प्रकार के प्रवाह)

- Steady and Unsteady flow (सतत और असतत प्रवाह) :-** किसी particular space पर यदि fluid की properties समय के साथ नहीं बदलती है तो इस प्रकार का प्रवाह सतत (steady) प्रवाह कहलाता है अन्यथा प्रवाह असतत (unsteady) प्रवाह कहलाता है।

Mathematically

$$\text{Steady flow:- } \left. \frac{\delta F}{\delta t} \right|_{\text{space}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta P}{\delta t} = 0$$

$$\frac{\delta V}{\delta t} = 0$$

$$\frac{\delta p}{\delta t} = 0$$

$$\text{Unsteady flow:- } \left. \frac{\delta F}{\delta t} \right|_{\text{space}} \neq 0$$

- Uniform and Non-uniform flow (एकसमान तथा असमान प्रवाह):-** किसी विशेष समय (particular time) पर यदि fluid की properties स्थान के साथ नहीं बदलती है तो इस प्रकार का प्रवाह एक समान (uniform) प्रवाह कहलाता है अन्यथा प्रवाह असमान प्रवाह (Non-uniform flow) कहलाता है।

Mathematically

$$\text{Uniform } \left. \frac{\delta F}{\delta s} \right|_{\text{time}} = 0$$

$$\text{Non-uniform } \left. \frac{\delta F}{\delta s} \right|_{\text{time}} \neq 0$$

- Rotational and Irrotational flow (घूर्णन तथा अघूर्णन प्रवाह):-**

- गति के दौरान जब fluid particles उनके द्रव्यमान केन्द्र (center of mass) के सापेक्ष rotate करते हैं तो इस प्रकार का प्रवाह घूर्णन (rotational) प्रवाह कहलाता है अन्यथा अघूर्णन (irrotational) प्रवाह कहलाता है।
- हम एक flat plate को consider करते हैं, इसकी boundary के पास वाला region श्यानता से बहुत ज्यादा प्रभावित होता है इसलिए इस क्षेत्र (region) को श्यान क्षेत्र (viscous region) कहते हैं।
- Boundary layer से दूर, श्यानता (viscosity) का प्रभाव नगण्य हो जाता है। इसलिए यह क्षेत्र (region) अश्यान क्षेत्र (inviscid region) कहलाता है।

- एक प्रवाह क्षेत्र (flow field) में fluid particles के घूर्णन (rotation) का कारण श्यानता (viscosity) होता है इस प्रकार श्यान क्षेत्र (viscous region) में प्रवाह rotational होगा। यदि श्यानता का प्रभाव नगण्य हो तो वहां अश्यान क्षेत्र (inviscid region) होगा और प्रवाह का प्रकार अघूर्णीय (irrotational) होगा।
- एक flow field में श्यानता (viscosity) की अनुपस्थिति में भी fluid की गति rotational हो सकती है यदि fluid के flow field में प्रवेश करने से पहले ही उसमें घूर्णन (rotational) गति हो।

☺ ☺ ☺ ☺ → Irrotational (Translation only)

☺ ☹ ☹ ☹ → Rotational (Translation + Rotation)

4. **Compressible and Incompressible Flow (सम्पीड्य तथा असम्पीड्य) :-** यदि fluid का घनत्व (density) प्रवाह के दौरान नहीं बदलता है तो इस प्रकार का प्रवाह असम्पीड्य प्रवाह कहलाता है अन्यथा प्रवाह सम्पीड्य कहलाता है।

For compressible flow (सम्पीड्य प्रवाह के लिए)

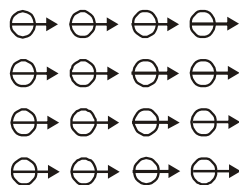
$$dp \neq 0$$

For incompressible flow (असम्पीड्य प्रवाह के लिए)

$$dp = 0$$

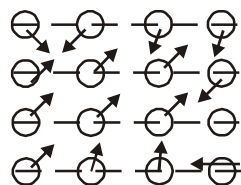
5. **Laminar and Turbulent Flow (स्तरीय तथा विक्षुब्ध) :-** प्रवाह स्तरीय प्रवाह (Laminar flow) ऐसा प्रवाह जिसमें fluid particles अच्छी तरह परिभाषित पथ (well-defined path) या stream line में गति करते हैं तथा सभी stream line सीधी तथा समान्तर होती हैं।

स्तरीय प्रवाह (laminar flow) में किसी particular plane में fluid particle एक layer से दूसरी layer में jump नहीं करते हैं, सभी particles की दिशा एक ही होती है।



Turbulent flow (विक्षुब्ध प्रवाह) :- इस प्रकार के प्रवाह में fluid particles zig-zag way में गति करते हैं।

विक्षुब्ध प्रवाह (turbulent flow) में fluid particles एक layer से दूसरे layer में jump करते हैं। इसलिए particles के vectors की दिशा किसी विशेष plane में न होकर अलग-अलग होती है।



Random movement of the particles

6. **One, Two or three-dimensional flow with respect to space (Space के सापेक्ष, एक, द्वि या त्रि-दिशीय प्रवाह) :-**

One-Dimensional Flow (एक-दिशीय प्रवाह) :-

- यदि space के सापेक्ष flow parameters एक ही दिशा में varies करते हैं तो इस प्रकार का प्रवाह एक दिशीय प्रवाह कहलाता है। i.e $V=f(x, t)$
- एक दिशीय प्रवाह में, किसी cross-section में प्रवाह की दिशा के लम्बवत flow parameters पूरी लम्बाई में नियत रहते हैं (वेग, दाब, घनत्व, श्यानता) लेकिन अनुदैर्घ्य दिशा में vary करते हैं।
- प्रवाह क्षेत्र (Flow field), stream line द्वारा प्रदर्शित किया जाता है जो अनिवार्य रूप से सीधी तथा समान्तर होती है।

Two-Dimensional Flow (द्वि-दिशीय प्रवाह) :-

यदि flow parameter, space के सापेक्ष दो दिशा में vary करते हैं तो इस प्रकार का flow two-dimensional flow कहलाता है। i.e $V=f(x, y, t)$

Two dimensional flow में, प्रवाह वेग (flow velocity) तथा अन्य fluid parameters दो दिशा (अनुदैर्घ्य तथा उर्ध्वाधर) में vary करते हैं।

Three-Dimensional Flow (त्रि-दिशीय प्रवाह) :-

यदि flow parameters, space के सापेक्ष तीन दिशा में vary करते हैं तो यह प्रवाह त्रि-दिशीय प्रवाह कहलाता है। $V=f(x, y, z, t)$

इसमें Flow properties तीनों दिशा में vary करती हैं

जैसे - मुड़े (bent) हुए पाइप में प्रवाह, fluid machine में प्रवाह, एक नोजल के inlet पर प्रवाह

Type of flow	Steady	Unsteady
1 - D	$V=f(x)$	$V=f(x, t)$
2 - D	$V=f(x, y)$	$V=f(x, y, t)$
3 - D	$V=f(x, y, z)$	$V=f(x, y, z, t)$

Note:-

- एक लम्बे नियत व्यास वाले पाइप से नियत प्रवाह दर (constant flow rate) पर प्रवाह → सतत एकसमान प्रवाह (Steady uniform flow).
- एक लम्बे एक समान व्यास वाले पाइप से घटती या बढ़ती प्रवाह दर से प्रवाह → असतत एकसमान प्रवाह (Unsteady uniform flow).
- एक tapering पाइप से नियत प्रवाह दर (constant flow rate) → सतत असमान प्रवाह (Steady non-uniform flow).
- एक tapering पाइप से घटते या बढ़ती प्रवाह दर से प्रवाह → असतत असमान प्रवाह (Unsteady non-uniform flow).

Rate of flow or discharge (प्रवाह दर या निस्सरण) :- किसी pipe या channel के section से प्रति सेकण्ड प्रवाह होने वाले fluid की मात्रा प्रवाह दर (flow rate) कहलाती है।

माना कि किसी पाइप से द्रव प्रवाहित हो रहा है जिसमें

A = Cross-sectional area of pipe (Pipe का cross-section area)

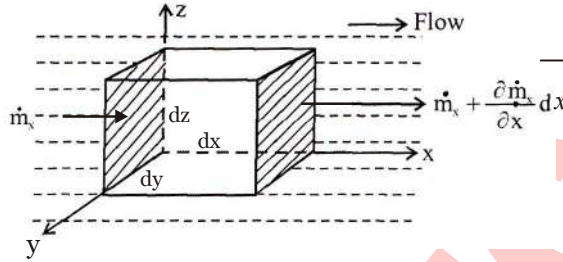
V = Average velocity of fluid across the section (Section में fluid का औसत वेग)

तब निस्सरण (discharge) $Q = A \times V$

Continuity equation (सांतत्य समीकरण) :-

- Continuity equation द्रव्यमान संरक्षण के सिद्धान्त पर आधारित है।
 - एक मात्र यही वह समीकरण जो यह indicates करती है कि प्रवाह सम्भव है या नहीं
 - प्रवाह के सम्भव होने के लिए continuity equation satisfied होना जरूरी है।
- चित्र में दिखाये अनुसार fluid के एक element को consider कीजिए।

$$(\dot{m}_{in} - \dot{m}_{out}) = \dot{m}_{storage}$$



सामान्य 3-D प्रवाह में

$$\vec{V} = u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k}$$

$u, v, w \rightarrow$ क्रमशः x, y, z दिशा में velocity component

$$\vec{V} = F(x, y, z, t)$$

द्रव्यमान संरक्षण से

$$\begin{aligned} (\dot{m}_{in} - \dot{m}_{out})_x &= \dot{m}_x - \left(\dot{m}_x + \frac{\partial \dot{m}_x}{\partial x} dx \right) \\ &= -\frac{\partial \dot{m}_x}{\partial x} dx \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} [(\rho(dydz)u)dx] \quad (\because dv = dx dy dz) \\ (\dot{m}_{in} - \dot{m}_{out})_x &= -\frac{\partial}{\partial x} (\rho u dv) \end{aligned} \quad \text{.....(1)}$$

Similarly,

$$(\dot{m}_{in} - \dot{m}_{out})_y = -\frac{\partial}{\partial x} (\rho v dv) \quad \text{.....(2)}$$

$$(\dot{m}_{in} - \dot{m}_{out})_z = -\frac{\partial}{\partial z} (\rho w dv) \quad \text{.....(3)}$$

उपरोक्त की तीनों equations को जोड़ने के बाद

$$(\dot{m}_{in} - \dot{m}_{out}) = -dv \left[\frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho w) \right]$$

$$\therefore (\dot{m}_{in} - \dot{m}_{out}) = \dot{m}_{storage}$$

and

$$\frac{\partial \dot{m}_{st}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\rho dv) = dv \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\Rightarrow -dv \left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) \right] = dv \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) + \frac{d\rho}{dt} = 0}$$

यह समीकरण सामान्य 3-D continuity equation के नाम से जानी जाती है।

(1) Steady Flow, $\frac{\partial \rho}{\partial t} \rightarrow 0$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0$$

(2) Steady, Incompressible flow ($\rho = \text{constant}$)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

(3) Steady, Incompressible, 2-D flow

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

(4) 1-D, steady flow

$$(\dot{m}_{in} - \dot{m}_{out})_x = 0$$

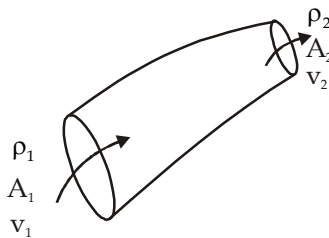
$$\vec{v} = u\hat{i}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho A u) = 0 \quad (\because v = u)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}(\rho A v) = 0$$

$$\rho_1 A_1 v_1 = \text{constant}$$

$$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2$$



Case I:- If flow is incompressible (यदि प्रवाह असम्पीड्य हो)

$$\rho_1 = \rho_2$$

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

Case II:- If flow is compressible (यदि प्रवाह सम्पीड्य हो)

$$\rho_1 \neq \rho_2$$

$$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2$$

Representation of flow

(प्रवाह का प्रस्तुतीकरण)

Stream Line:-

यह flowing fluid पर खींची गई काल्पनिक curve है जिसके किसी भी बिन्दू पर खींची गई tangent उस बिन्दू पर fluid particle के velocity vector की दिशा को दर्शाती है।

**Equation of stream line (धारा रेखा का समीकरण)**

Stream line के सापेक्ष एक small position vector dr लेने पर

$$\vec{dr} = (dx)\hat{i} + (dy)\hat{j} + (dz)\hat{k}$$

$$\vec{V} = \left[(u)\hat{i} + (v)\hat{j} + (w)\hat{k} \right]$$

यहां velocity vector तथा direction vector एक-दूसरे के समान्तर है इसलिए दोनों का cross product शून्य होगा।

$$\vec{dr} \times \vec{V} = 0$$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ dx & dy & dz \\ u & v & w \end{vmatrix} = 0$$

$$\hat{i}(\underbrace{w dy - v dz}_0) - \hat{j}(\underbrace{w dx - u dz}_0) + \hat{k}(\underbrace{v dx - u dy}_0)$$

$$\frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}, \quad \frac{dx}{u} = \frac{dz}{w}, \quad \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$$

Stream line का समीकरण

$$\boxed{\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}}$$

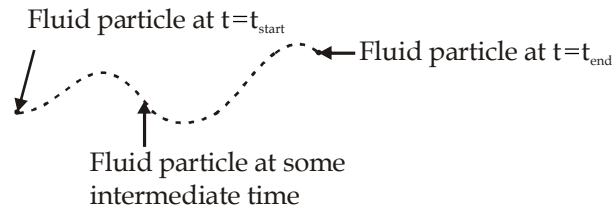
इस प्रकार x-y plane में stream line का समीकरण

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{v}{u}$$

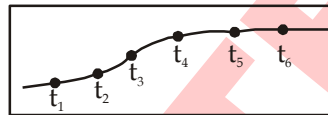
Note:-

1. एक streamline कभी भी अपने आपको नहीं काटती है और न ही दो streamline एक-दूसरे को intersect कर सकती है।
2. Streamline के मध्य का space, वेग के साथ व्युत्क्रमानुपाती बदलता है क्योंकि streamline के मध्य प्रवाह (discharge) दो Streamline के मध्य space से बाहर नहीं जा सकता है। इस प्रकार जैसे-जैसे streamline के मध्य space बढ़ता है velocity घटती जाती है।

Path line

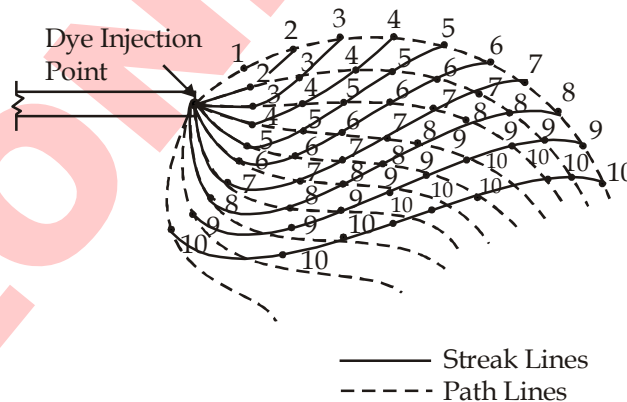


- एक समयावधि के दौरान एक single fluid particle द्वारा तय किया गया पथ का trace होता है।
- अलग-अलग समय पर एक path line स्वयं को काट सकती है।
- Path line वास्तविक रेखा है जबकि stream line काल्पनिक रेखा होती है।
- Path line एक lagrangian concept है।
- नीचे दिखाये चित्र में तात्क्षणिक समय किसी fluid particle की अवस्था को दिखाया गया है, जब इन बिन्दुओं को जोड़ा जाता है तब हमें path line प्राप्त होती है।



Streak line or filament line:-

- यह किसी समयावधि में flow field में किसी बिन्दू से cross होने वाले fluid particles को जोड़ने पर बनने वाली line होती है।
- यह गैसों के movement को track करने में उपयोग किया जाता है।



Note :- यदि flow study है तो ये तीनों लाइन गणितीय रूप में same होगी।

CHAPTER - 5

(FLUID DYNAMICS)

Fluid dynamic में तरल की गति का अध्ययन, उस बल को ध्यान में रखते हुए करते हैं जिसके कारण fluid में motion होता है।

Fluid flow का गतिकी (dynamic) व्यवहार का विश्लेषण न्यूटन के गतिकी का दूसरा नियम $\vec{F} = M\vec{a}$ से किया जाता है।

तरल के प्रवाह (fluid flow) में विभिन्न प्रकार के बल कार्य करते हैं।

- (a) गुरुत्व बल (Gravity Force) ($\vec{F}_g$)
 - (b) Pressure Force ($\vec{F}_p$)
 - (c) श्यान बल (Viscous Force) ($\vec{F}_v$)
 - (d) सम्पीड़न के कारण बल (Force due to compressibility) ($\vec{F}_c$)
 - (e) Force due to turbulence ($\vec{F}_t$)
 - (f) Minor forces like surface tension ($\vec{F}_s$)
- जब गति के समीकरण में सभी बलों को शामिल किया जाता है तो यह newton's equation of motion कहलाती है।
 - जब सम्पीड़्यता (compressibility) तथा अन्य गौण बल नगण्य माना जाये तो यह Reynold's equation of motion कहलाती है।

$$\vec{F}_g + \vec{F}_p + \vec{F}_v + \vec{F}_t = M\vec{a}$$
 - जब सम्पीड़्यता (compressibility), turbulence तथा minor forces को नगण्य माना जाये तथा केवल गुरुत्व (gravity), pressure तथा श्यान बल (viscous force) को शामिल किया जाये तो यह गति की समीकरण नेवियर स्टॉक (Navier-stock) गति की समीकरण कहलाती है।

$$\vec{F}_g + \vec{F}_p + \vec{F}_v = M\vec{a}$$
 - जब केवल गुरुत्व (gravity) तथा pressure force को considered किया जाये तो गति की समीकरण Euler's equation of motion कहलाती है।

$$\vec{F}_g + \vec{F}_p = M\vec{a}$$
 - Dynamics of fluid motion में जब केवल दाब तथा गुरुत्व को शामिल किया जाता है तो यह संवेग सिद्धान्त (Euler's equation) तथा ऊर्जा सिद्धान्त (Bernoulli equation) से संचालित होती है।
 - Bernoulli equation :- यह समीकरण एक stream line के सापेक्ष steady, incompressible अवस्था में Euler's equation of motion का समाकलित रूप है।

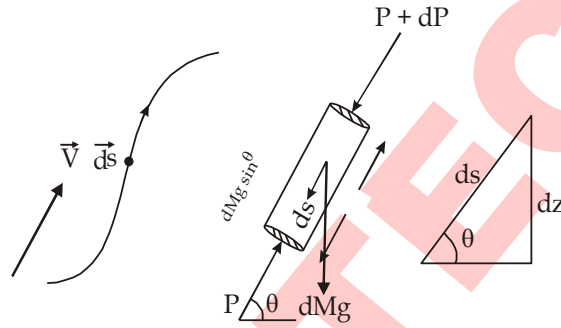
Euler equation :- यह गति की वह समीकरण है जिसमें गुरुत्व (gravity) तथा दाब (pressure) के कारण बल को शामिल किया जाता है। यह समीकरण एक fluid element की गति का stream line के सापेक्ष निम्न प्रकार consider करके drive किया जाता है।

मानिए चित्र में दिखाये अनुसार एक stream line जिसमें s-direction में प्रवाह हो रहा है।

मानिए एक dA अनुप्रस्थ काट का बेलनाकार अवयव जिसकी लम्बाई ds है।

मान्यताएँ (Assumptions)

1. प्रवाह streamlined है $[\nabla \times \vec{V} = 0]$
2. प्रवाह अश्यान (inviscid) है $[F_{\text{viscous}} = 0]$



एक stream lined प्रवाह पर s-direction में eqⁿ लिखने पर

$$(P.dA) - (P + dP)dA - dMg \sin \theta = dM.a_s$$

$$-dPdA - \rho dA.(dz)g = \rho dA ds.a_s$$

$$dP + \rho ds a_s + \rho g dz = 0$$

$$\therefore a_s = v \frac{\delta V}{\delta S} + \frac{\delta V}{\delta t}$$

$$dP + \rho.ds \left(V \frac{\delta V}{\delta S} + \frac{\delta V}{\delta t} \right) + \rho g dz = 0$$

.....(1)

Equation (1) stream lined प्रवाह के लिए Euler's equation है

$$\text{steady प्रवाह के लिए } \frac{\delta V}{\delta t} = 0 \text{ and } \frac{\delta V}{\delta S} = \frac{dV}{ds}$$

$$dP + \rho ds v \left(\frac{dV}{ds} \right) + \rho g dz = 0$$

$$dP + \rho V dV + \rho g dz = 0$$

$$\frac{dP}{\rho} + V dV + g dz = 0$$

.....(2)

Equation (2) steady तथा streamlined प्रवाह के लिए Euler's equation है।

Euler's Equation से Bernoullis equation प्राप्त करना

Euler's equation को समाकलित (integration) करके निम्न प्रकार Bernoullis equation निकाली जाती है।

$$\int \frac{dP}{\rho} + \int g dz + \int v dv = \text{constant}$$

यदि प्रवाह असम्पीड्य (incompressible) है तो ρ नियत होगा

$$\therefore \frac{P}{\rho} + gz + \frac{v^2}{2} = \text{constant}$$

$$\text{or} \quad \frac{p}{\rho g} + z + \frac{v^2}{2g} = \text{constant}$$

$$\text{or} \quad \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + z = \text{constant} \quad \dots (1)$$

Equation (1) ही Bernoullis' equation है जिसमें

$\frac{P}{\rho g}$ = Fluid के इकाई भार की pressure energy या दाब शीर्ष (pressure head)

$\frac{v^2}{2g}$ = Fluid के इकाई भार की गतिज ऊर्जा kinetic energy या kinetic head

z = Fluid के इकाई भार की स्थितिज ऊर्जा potential energy या potential head

बरनोली समीकरण के derivation में निम्न मान्यताओं (assumption) को माना जाता है।

- Fluid आदर्श होना चाहिए जैसे viscosity शून्य हो
- प्रवाह steady होना चाहिए
- प्रवाह असम्पीड्य (incompressible) होना चाहिए
- प्रवाह अघूर्णनीय (irrotational) होना चाहिए
- प्रवाह stream line में होना चाहिए

Different forms of Bernoulli equation

(बरनोली समीकरण के विभिन्न रूप)

1. 1st Energy per unit volume (इकाई आयतन की ऊर्जा के रूप में):-

$$P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z = \text{constant}$$

$P \rightarrow$ प्रति इकाई आयतन Pressure energy

$\frac{1}{2}\rho v^2 \rightarrow$ प्रति इकाई आयतन गतिज ऊर्जा

$\rho g z \rightarrow$ प्रति इकाई आयतन स्थितिज ऊर्जा

$$\text{Unit} = \frac{\text{Joule}}{\text{m}^3} = \frac{\text{N} \times \text{m}}{\text{m}^3} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

2. **2nd Energy per unit weight or Head (प्रति इकाई भार ऊर्जा या शीर्ष) :-**

$$\frac{P}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + z = \text{constant}$$

$$\frac{P}{\rho g} \rightarrow \text{प्रति इकाई भार दाब ऊर्जा या दाब शीर्ष}$$

$$\frac{v^2}{2g} \rightarrow \text{प्रति इकाई भार गतिज ऊर्जा या kinetic head.}$$

$$z \rightarrow \text{प्रति इकाई भार स्थितिज ऊर्जा या datum head}$$

3. **3rd Energy per unit Mass (प्रति इकाई द्रव्यमान ऊर्जा):-**

$$\frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz = \text{constant}$$

$$\frac{P}{\rho} \rightarrow \text{प्रति इकाई द्रव्यमान दाब ऊर्जा}$$

$$\frac{v^2}{2} \rightarrow \text{प्रति इकाई द्रव्यमान गतिज ऊर्जा}$$

$$gz \rightarrow \text{प्रति इकाई द्रव्यमान स्थितिज ऊर्जा}$$

Bernoulli Theorem (बरनोली प्रमेय) :- इस प्रमेय के अनुसार एक असम्पीड्य (incompressible) fluid के steady तथा आदर्श प्रवाह (ideal flow) में fluid में किसी भी बिन्दू पर कुल ऊर्जा (total energy) नियत रहती है। कुल ऊर्जा (total energy) में दाब ऊर्जा, गतिज ऊर्जा तथा स्थितिज ऊर्जा (potential energy) या datum energy शामिल होती है।

Fluid के इकाई भार की ऊर्जा निम्न प्रकार है।

$$\text{Pressure energy} = \frac{P}{\rho g}$$

$$\text{Kinetic energy} = \frac{v^2}{2g}$$

$$\text{Datum energy} = z$$

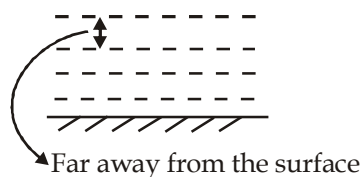
इस प्रकार गणितीय रूप में बरनोली प्रमेय निम्न प्रकार लिखी जाती है।

$$\frac{P}{w} + \frac{v^2}{2g} + z = \text{Constant}$$

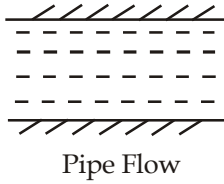
नोट :- बरनोली समीकरण ऊर्जा संरक्षण (conservation of energy) पर आधारित है।

**Application
(अनुप्रयोग)**

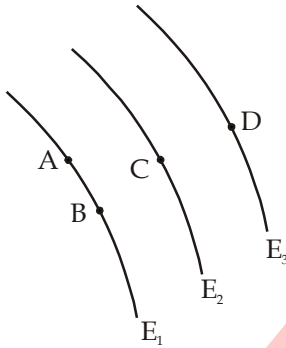
1.



2.



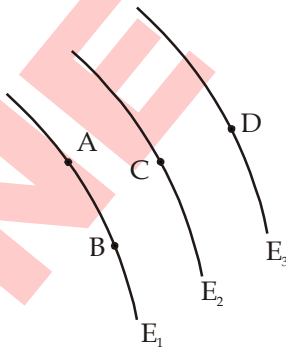
3. Irrotational



$$E_A = E_B = E_C = E_D$$

$$E_1 = E_2 = E_3$$

4. Rotational flow:-



$$E_A = E_B \neq E_C \neq E_D$$

$$E_1 \neq E_2 \neq E_3$$

- अघूर्णीय (irrotational) प्रवाह के लिए प्रवाह में किन्हीं दो बिन्दुओं के मध्य bernoulli's समीकरण को apply किया जा सकता है।
- घूर्णीय (rotational) flow के लिए एक ही stream line पर उपस्थित point पर Bernoulli equation को apply किया जा सकता है।

$$\text{Total Head} = \frac{P}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + z$$

$$\text{Piezometric Head} = \frac{P}{\rho g} + z$$

- हम plate surface के पास viscous force से energy loss होने के कारण वहाँ Bernoulli equation apply नहीं कर सकते हैं।
- Internal flow के दौरान pipe flow के center line पर ही Bernoulli equation valid होती है। Pipe surface पर उच्च श्यान क्षेत्र (highly viscous zone) होने के कारण यहां Bernoulli equation को apply नहीं कर सकते हैं।
- External flow में boundary layer से बाहर की तरफ ही valid होती है।

Flow Measurement Devices

(प्रवाह मापक)

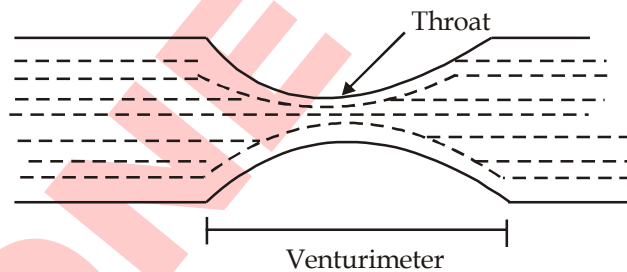
- (1) Venturimeter
- (2) Orifice Meter
- (3) Pitot Tube

Arrangements:-

- (1) With Piezometer
- (2) With differential U-tube manometer

(1) Venturimeter:-

यह निस्सरण (discharge (m^3/sec) के मापन में उपयोग होती है।



Coefficient of discharge (C_d)

$$C_d \in [0.97 - 0.99]$$

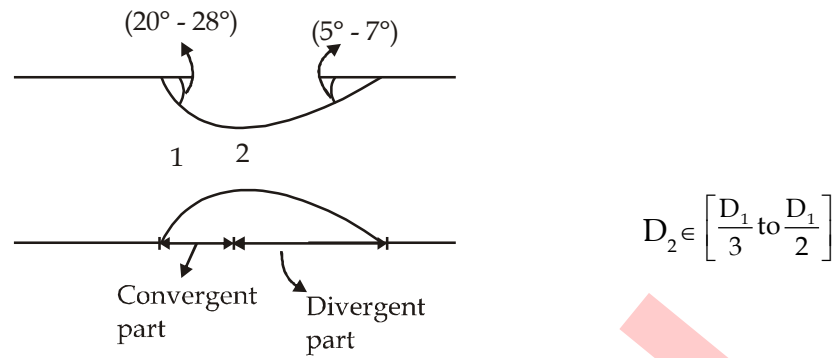
$$C_d = \frac{Q_{\text{Actual}}}{Q_{\text{theoretical}}}$$

Construction Details

(संरचनात्मक विवरण)

इसके तीन भाग होते हैं।

- (i) एक छोटा अभिसारी (converging part)
- (ii) Throat
- (iii) अपसारी भाग (Diverging part)

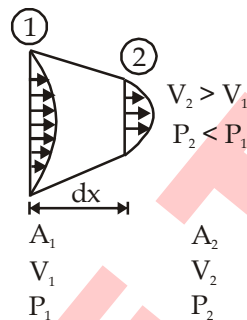


Convergent angle = $20^\circ - 28^\circ$

Divergent angle = $5^\circ - 7^\circ$

Length of Divergent part = $(3 - 4) \times$ length of convergent part

Converging Part



By continuity equation

$$A_1 V_1 = A_2 V_2$$

$$A_1 > A_2$$

$$V_2 > V_1$$

So

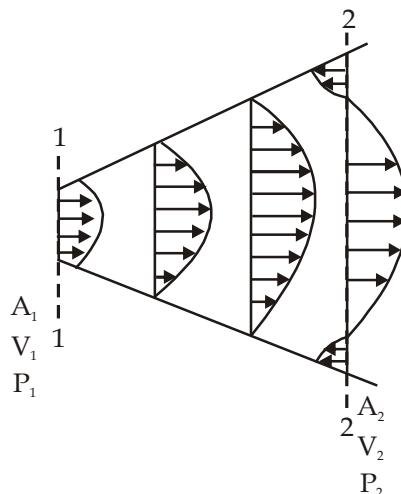
$$P_2 < P_1$$

$\therefore$

$$dP = P_2 - P_1 \Rightarrow -ve$$

$$\frac{dP}{dx} < 0 \rightarrow \text{Flow favourable condition}$$

Diverging Part



$$V_2 < V_1$$

$$P_2 > P_1 \Rightarrow dP = +ve$$

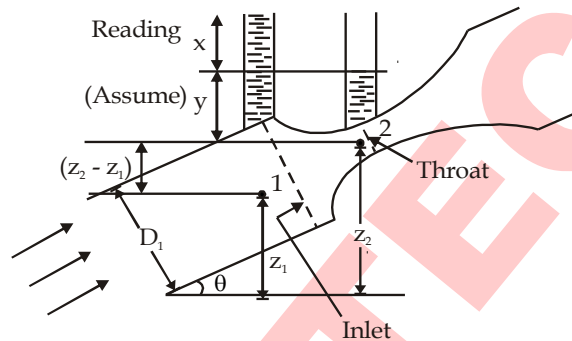
$$\frac{dP}{dx} > 0 \rightarrow \text{Adverse condition of flow}$$

इस प्रकार flow separation की संभावनाओं को कम करने के लिए venturimeter के diverging भाग का diverging angle छोटा रखा जाता है तथा convergent भाग की लम्बाई की तुलना में divergent भाग की लम्बाई ज्यादा रखी जाती है।

Veturimeter का piezometer के साथ installation

Installation:-

With piezometer:-



Theoretical Discharge (सैद्धान्तिक निस्सरण)

निम्न चित्र में दिखाये अनुसार एक पाइप में लगी venturimeter meter पर विचार करते हैं जिसमें fluid (water) प्रवाहित हो रहा है।

जहाँ

D_1 = Inlet पर व्यास या section (1) पर व्यास

D_2 = Throat पर व्यास या section (2) पर व्यास

p_1 = Section (1) पर दाब

p_2 = Section (2) पर दाब

v_1 = Section (1) पर fluid velocity

v_2 = Section (2) पर fluid velocity

$$A_1 = \text{section (1) पर क्षेत्रफल} = \frac{\pi D_1^2}{4}$$

$$A_2 = \text{section (2) पर क्षेत्रफल} = \frac{\pi D_2^2}{4}$$

तथा D_2, p_2, v_2, A_2 section (2) पर संगत मान

Section 1 तथा 2 पर सामान्य समीकरण (general equation) लगाने पर

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2$$

$$\frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g} = \left(\frac{P_1}{\rho g} + z_1 \right) - \left(\frac{P_2}{\rho g} + z_2 \right)$$

$\therefore$

$$Q_{th} = A_1 V_1 = A_2 V_2$$

$$V_1 = \frac{Q_{th}}{A_1}, V_2 = \frac{Q_{th}}{A_2}$$

$$\frac{Q_{th}^2}{2g} \left[\frac{1}{A_2^2} - \frac{1}{A_1^2} \right] = h$$

$$\frac{Q_{th}^2}{2g} \left[\frac{A_1^2 - A_2^2}{A_1^2 A_2^2} \right] = h$$

$$Q_{th}^2 = \frac{A_1^2 A_2^2}{A_1^2 - A_2^2} 2gh$$

$$Q_{th} = \frac{A_1 A_2}{A_1^2 - A_2^2} \sqrt{2gh}$$

Actual Discharge :-

$$Q_{actual} = \frac{A_1 A_2}{\sqrt{A_1^2 - A_2^2}} \sqrt{2g(h - h_L)}$$

$$Q_{actual} = \frac{A_1 A_2}{\sqrt{A_1^2 - A_2^2}} \sqrt{2gh} \times \sqrt{\frac{h - h_L}{h}}$$

↓
 C_d

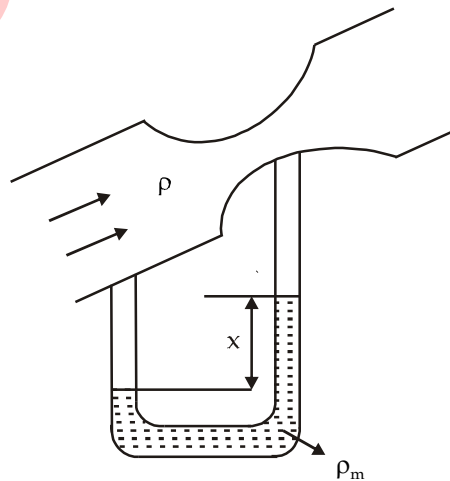
$$Q_{actual} = C_d \frac{A_1 A_2}{\sqrt{A_1^2 - A_2^2}} \sqrt{2gh}$$

$$C_d = \sqrt{\frac{h - h_L}{h}}$$

नोट :-

1. Piezometer के साथ
 $h = x$
2. Simple difference U tube manometer के साथ

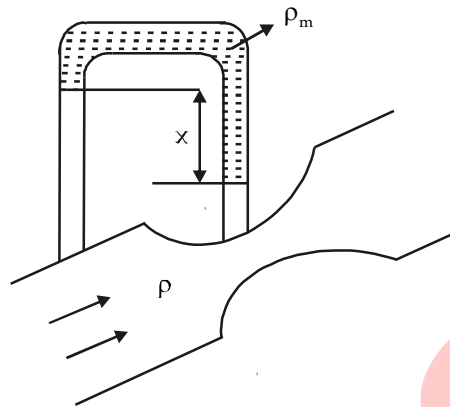
$$\rho_m > \rho$$



$$h = x \left[\frac{\rho_m}{\rho} - 1 \right]$$

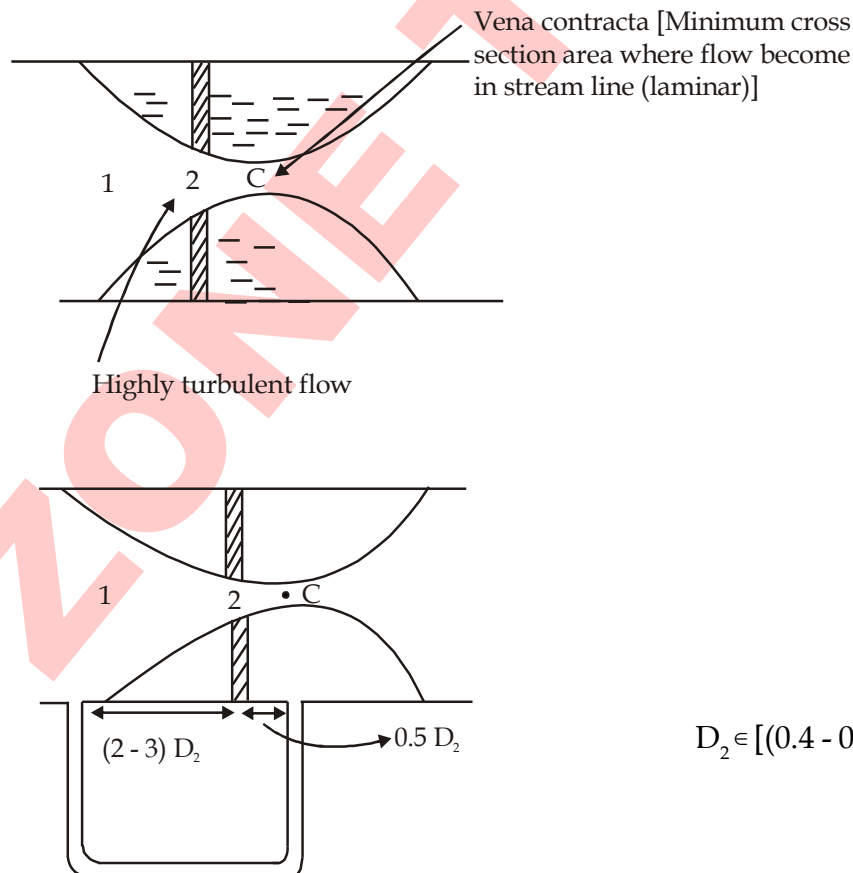
3. Inverted difference U-tube manometer के साथ

$$\rho_m < \rho$$



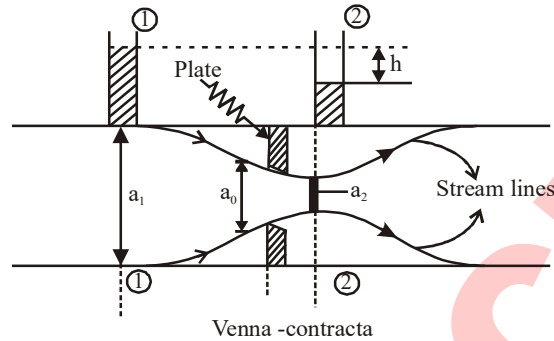
$$h = x \left(1 - \frac{\rho_m}{\rho} \right)$$

Orifice Meter :- यह निस्सरण (discharge in m³/sec) के मापन में उपयोग किया जाता है।



- यह pipe से निस्सरण (discharge) के मापन में use किया जाता है।
- Discharge measurement का concept इसमें venturimeter की तरह ही है लेकिन इसका (orifice meter) arrangement venturimeter की तुलना में सस्ता होता है।

- इसमें पाइप का छोटा सा भाग ही प्रभावित होता है इसलिए यदि space restriction होने पर venturimeter की जगह orificemeter का उपयोग किया जा सकता है।
- Flow separation के कारण इसमें head loss ज्यादा होता है यह इसका disadvantage है।
- वह क्षेत्र जहां flow area न्यूनतम होता है venna-contracta कहलाता है।



a_1 = section (1)-(1) पर अनुप्रस्थ-काट क्षेत्रफल

a_0 = opening पर अनुप्रस्थ-काट क्षेत्रफल

a_2 = venna-contracta पर flow का अनुप्रस्थ-काट क्षेत्रफल

संकुचन गुणांक (Coefficient of contraction) $(C_c) = \frac{a_2}{a_0}$

a_2 को find out करना difficult होता है इसलिए $a_2 = C_c \cdot a_0$

Section (1) and (2) पर बरनोली समीकरण apply करने पर

$$\frac{P_1}{\gamma} + Z_1 + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\gamma} + Z_2 + \frac{V_2^2}{2g} \quad (\gamma = \rho g)$$

$$\left(\frac{P_1}{\gamma} + Z_1 \right) - \left(\frac{P_2}{\gamma} + Z_2 \right) = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g}$$

$$h = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} = \frac{Q^2 \left(\frac{1}{a_2^2} - \frac{1}{a_1^2} \right)}{2g} \quad (Q = a_1 v_1 = a_2 v_2)$$

$$Q_{th} = \frac{a_1 a_2}{\sqrt{a_1^2 - a_2^2}} \sqrt{2gh}$$

$$Q_{th} = \frac{C_c a_1 a_0}{\sqrt{a_1^2 - a_0^2 C_c^2}} \sqrt{2gh}$$

Q_{actual} is taken as

$$Q_{actual} = \frac{C_d a_1 a_0 \sqrt{2gh}}{\sqrt{a_1^2 - a_0^2}}$$

C_d = orifice meter के लिए Coefficient of discharge [0.62 to 0.67]

3. Pitot Tube :-

Pitot tube किसी pipe या channel के किसी बिन्दू पर flow velocity के मापन में उपयोग किया जाने वाला उपकरण (device) है।

यह इस सिद्धान्त पर आधारित है कि यदि किसी point पर flow velocity शून्य हो जाती है तो वहां गतिज ऊर्जा के दाब ऊर्जा में रूपान्तरण से दाब में बढ़ोतरी होती है।

यह इसका साधारण रूप में है जो चित्र में दिखाई गई है यह एक समकोण (right angle) पर मुड़ी कांच की tube होती है।

गतिज ऊर्जा (kinemtic energy) का दाब ऊर्जा (pressure energy) में बदलने से tube में liquid rise होता है।

Tube में liquid rises के आधार पर ही velocity का measurement किया जाता है।

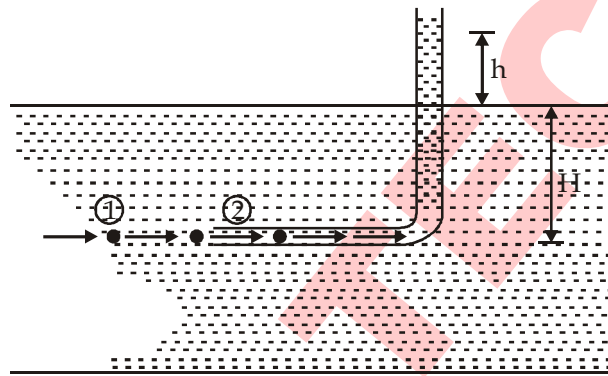


Fig. Pitot-tube

दो बिन्दू (1) and (2) पर विचार करते हैं जिसमें बिन्दू (2) pitot-tube का inlet है तथा बिन्दू (1) इससे दूर कोई बिन्दू है जैसा कि figure में दिखाया गया है।

Let

p_1 = बिन्दू (1) पर दाब-तीव्रता (pressure intensity)

v_1 = बिन्दू (1) पर प्रवाह का वेग

p_2 = बिन्दू (2) पर दाब तीव्रता (pressure intensity)

v_2 = बिन्दु (2) पर प्रवाह वेग जो कि शून्य है

H = liquid में tube की गहराई

h = liquid की free surface से tube में rise liquid की height

बिन्दू (1) व (2) पर बरनोली समीकरण लगाने पर

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2$$

But $z_1 = z_2$ as points (1) and (2) are on the same line and $v_2 = 0$.

$$\frac{p_1}{\rho g} = \text{pressure head at (1)} = H$$

$$\frac{p_2}{\rho g} = \text{pressure heat at (2)} = (h + H)$$

उपरोक्त values का मान समीकरण (1) में रखने पर

$$\therefore H + \frac{v_1^2}{2g} = (h + H)$$

$\therefore h = \frac{v_1^2}{2g}$ or $v_1 = \sqrt{2gh}$ यह सैद्धान्तिक (theoretical) मान है।

$(v_1)_{act} = C_v \sqrt{2gh}$ यह वास्तविक (actual) मान है।

where C_v = Co-efficient of pitot-tube

$\therefore$ Velocity at any point $v = C_v \sqrt{2gh}$

नोट :-

1. यदि Pipe inclined हो

$$\frac{v^2}{2g} = \left(\frac{P_2}{\rho g} + z_2 \right) - \left(\frac{P_1}{\rho g} + z_1 \right)$$

Kinetic Head = Stagnation Piezometric Head - Static Piezometric Head

2. यदि Pipe is Horizontal हो :-

$$z_1 = z_2$$

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{P_2}{\rho g} - \frac{P_1}{\rho g}$$

Kinetic Head = Stagnation Pressure Head - Static Pressure Head

Relation between C_d , C_v and C_c

Coefficient of Velocity (वेग गुणांक) (C_v) :- यह vena contracta पर liquid jet का वास्तविक वेग तथा liquid jet का सैद्धान्तिक वेग का अनुपात होता है। इसको C_v से denote किया जाता है।

$$C_v = \frac{\text{vena-contracta पर जेट का वास्तविक वेग}}{\text{सैद्धान्तिक वेग}} = \frac{V}{\sqrt{2gH}}$$

Where

V = Actual velocity

$\sqrt{2gH}$ = Theoretical velocity

इसका मान 0.95 to 0.99 तक होता है।

इसका मान orifice की shape, size तथा शीर्ष (head) पर निर्भर करता है।

सामान्यतया sharp-edged orifices के लिए इसका मान लगभग 0.98 होता है।

Coefficients of Contraction संकुचन गुणांक (C_c) :- यह vena-contracta पर jet का क्षेत्रफल तथा orifice के क्षेत्रफल का अनुपात होता है इसको C_c से denote किया जाता है।

Let

a = Area of orifice and

a_c = Area of jet at vena-contracta

Then

$$C_c = \frac{\text{vena-contracta पर jet का area}}{\text{orifice का area}} = \frac{a_c}{a}$$

इसका मान 0.61 to 0.69 तक होता है।

इसका मान orifice के shape and size तथा liquid के head पर निर्भर करता है।

सामान्यतया इसका मान 0.64 लिया जाता है।

Coefficients of Discharge (निस्सरण गुणांक) (C_d) :- यह orifice के वास्तविक निस्सरण तथा सैद्धान्तिक निस्सरण (theoretical discharge) का अनुपात होता है। इसको C_d से denote किया जाता है।

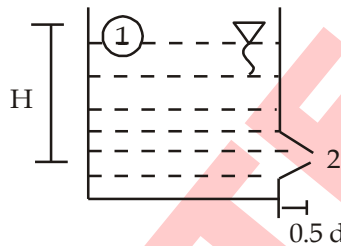
$$C_d = \frac{Q}{Q_{th}} = \frac{\text{Actual velocity} \times \text{Actual area}}{\text{Theoretical velocity} \times \text{Theoretical area}}$$

$$= \frac{\text{Actual velocity}}{\text{Theoretical velocity}} \times \frac{\text{Actual area}}{\text{Theoretical area}}$$

$$C_d = C_v \times C_c$$

C_d का मान 0.61 to 0.65 तक होता है। सामान्यतया इसका मान 0.62 लिया जाता है।

Flow through Orifice (orifice से प्रवाह) :- इसका उपयोग velocity के मापन में किया जाता है।



orifice का area = a

orifice से jet की velocity = V

बिन्दू (1) तथा (2) पर Bernoulli equation लगाने पर

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2$$

Because $V_1 = \frac{A_2}{A_1} \times V_2$ but $\frac{A_2}{A_1} \approx 0$ so $V_1 \approx 0$

$$\frac{V^2}{2g} = (z_1 - z_2)$$

$$\frac{V_{th}^2}{2g} = H$$

$$V_{th} = \sqrt{2gH}$$

$$V_{actual} = C_v \sqrt{2gH}$$

C_v = Coefficient of velocity

$$\text{Actual Discharge} = A_{actual} \times V_{actual}$$

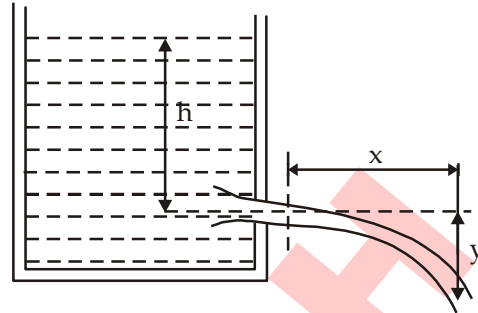
$$= C_c a \times C_v \sqrt{2gH} = C_d a \sqrt{2gH}$$

Experimental Determination of the coefficient of velocity for an orifice

(एक orifice के लिए वेग गुणांक निकालने के लिए experimental)

$v_x = v$ (Velocity in x direction)
 $v_y = 0$ (Velocity in y direction)

Velocity at orifice



$$x = ut + \frac{1}{2}gt^2$$

$$x = vt$$

....(1) (Because acceleration in x-direction = 0)

$$y = ut + \frac{1}{2}gt^2$$

$$y = \frac{1}{2}gt^2$$

....(2) ($\because v = 0$)

From equation (1) and (2)

$$y = \frac{1}{2}g \frac{x^2}{v^2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{x^2 \times g}{2y}} \quad \text{.....(A)}$$

समीकरण (A) vena contracta पर jet के प्रवाह के वास्तविक वेग को represents करता है तथा नियत शीर्ष (constant head) पर सैद्धान्तिक वेग

$$V_{th} = \sqrt{2gh}$$

इस प्रकार coefficient of velocity (C_v)

$$C_v = \frac{V_{actual}}{V_{th}} = \frac{\sqrt{\frac{x^2 \times g}{2y}}}{\sqrt{2gh}} = \sqrt{\frac{x^2}{4hy}}$$

Device	Measurement
1. Venturimeter	Rate of flow (Discharge)
2. Flow Nozzle	Rate of flow (Discharge)
3. Orifice Meter	Rate of flow (Discharge)
4. Bend Meter	Rate of flow (Discharge)
5. Retometer	Rate of flow (Discharge)
6. V-notch Weir	Discharge
7. Critical Depth Meter	Discharge (open channel)
8. Pitot Tube	Velocity
9. Current Meter	Velocity
10. Hot wire Anemometer	Air and gas velocity
11. Pitometer logs	Submarine and ship speed
12. Hydrometer	Specific gravity (Relative Density)
13. Tachometer	Rotational speed

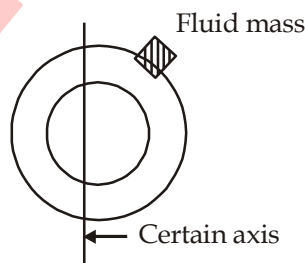
Vortex Flow

(भंवर प्रवाह)

Fluid mass का ऐसा प्रवाह जिसमें fluid किसी निश्चित अक्ष के सापेक्ष rotate करता हो vortex flow कहलाता है।

Note :-

- यह जरूरी नहीं है कि fluid mass किसी निश्चित अक्ष पर rotate करने के साथ-साथ वह उसके center of mass के सापेक्ष भी rotate करें।



Vertex flow दो प्रकार का होता है।

1. Free Vortex
2. Force Vortex

1. **Free Vortex :-** ऐसा प्रवाह जिसमें fluid mass को rotate करवाने के लिए कोई बाहरी torque की आवश्यकता नहीं होती।

$$\bar{T}_{\text{Ext}} = 0$$

T = Rate of change of angular momentum

$$\frac{d}{dt} \bar{J} = 0$$

$$\bar{j} = \text{constant}$$

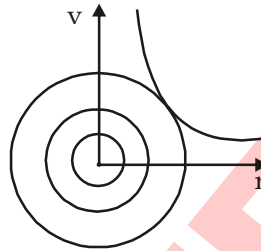
$$Mvr = \text{constant}$$

$$vr = \text{constant}$$

So hyperbolic curves formed

$$v \propto \frac{1}{r}$$

- (i) यहां Flow irrotational होता है।
- (ii) इसीलिए Bernoulli's equation लागू होगी।



2. **Forced Vortex :-** यह इस प्रकार का flow होता है जिसमें fluid mass की rotate करवाने के लिए एक बाहरी torque की आवश्यकता होती है।

इस प्रकार के प्रवाह में fluid mass एक नियत कोणीय वेग (ω) से rotate होता है।

$$\bar{T}_{\text{Ext}} \neq 0$$

$$\omega = \text{constant}$$

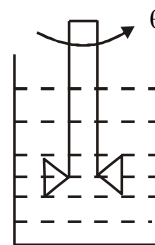
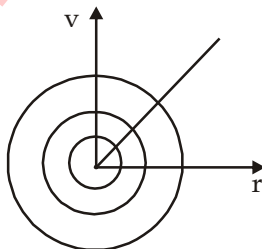
$$\omega = \frac{v}{r}$$

$$\frac{v}{r} = \text{constant}$$

So linear curve formed

$$v \propto r$$

- (i) यहां Flow rotational होता है।
- (ii) इसीलिए Bernoulli's equation लागू नहीं होगी।



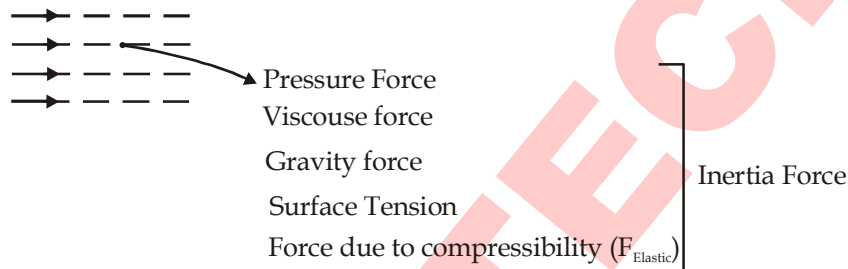
Ex:- Juicer

CHAPTER - 6

(DIMENSIONAL ANALYSIS)

Different types of forces in a fluid flow system (एक तरल प्रवाह प्रणाली में विभिन्न प्रकार के बल) :-

तरल प्रवाह की समस्याओं के लिए, तरल द्रव्यमान पर लगने वाले बल कोई भी हो सकते हैं या निम्नलिखित में से कई बलों का संयोजन हो सकता है।



1. Inertia Force:-

$$F_i = Ma$$

$$F_i = \rho L^3 \frac{V}{T}$$

$$F_i = \rho L^2 \frac{L}{T} \times V$$

$$F_i = \rho L^2 V^2$$

2. Viscous Force:-

$$F_v = \tau A$$

$$F_v = \mu \frac{du}{dy} A$$

$$F_v = \mu \frac{V}{L} L^2$$

$$F_v = \mu VL$$

3. Pressure Force:-

$$F_p = PA$$

$$F_p = PL^2$$

4. Gravity Force:-

$$F_g = Mg$$

$$F_g = \rho L^3 g$$

5. Surface Tension:-

$$F_\sigma = \sigma L$$

6. Elastic Force:-

$$F_e = KA$$

$$F_e = KL^2$$

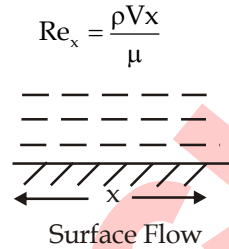
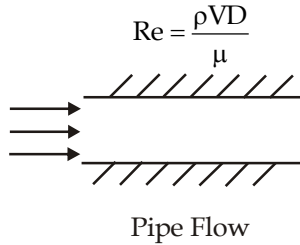
Dimensionless Numbers:-

- Reynold Number
- Euler Number
- Froude Number
- Weber Number
- Mach Number

(1) Reynolds Number (Re)

$$Re = \frac{\text{Inertia Force } (F_i)}{\text{Viscous Force } (F_v)} = \frac{\rho V^2 L^2}{\mu V L}$$

$$Re = \frac{\rho V L}{\mu} \quad L \rightarrow \text{Characteristic Dimension}$$



Application:- 1. Pipe Flow
2. Flow near the surface

(2) Euler Number (E_u)

$$E_u = \sqrt{\frac{\text{Inertia Force } (F_i)}{\text{Pressure Force } (F_p)}} = \sqrt{\frac{\rho V^2 L^2}{P L^2}}$$

$$E_u = \frac{V}{\sqrt{P/\rho}}$$

Application:- 1. Pipe Flow
2. Aeroplane in air

(3) Froude Number (Fr)

$$Fr = \sqrt{\frac{\text{Inertia Force } (F_i)}{\text{Gravity Force } (F_g)}} = \sqrt{\frac{\rho V^2 L^2}{\rho L^3 g}} = \frac{V}{\sqrt{Lg}}$$

$$Fr = \frac{V}{\sqrt{Lg}}$$

Application:- 1. River Flow
2. Open channel flow
3. Spill ways

(4) Weber Number (We)

$$We = \sqrt{\frac{\text{Inertia Force } (F_i)}{\text{Surface Tension Force } (F_\sigma)}} = \sqrt{\frac{\rho V^2 L^2}{\sigma L}}$$

$$We = \frac{V}{\sqrt{\frac{\sigma}{\rho L}}}$$

Application:- Capillary tube

(5) Mach number (Mc)

$$Mc = \sqrt{\frac{\text{Inertia Force}(F_i)}{\text{Force due to compressibility}(F_{\text{Elastic}})}} = \sqrt{\frac{\rho V^2 L^2}{KL^2}}$$

$$Mc = \frac{V}{\sqrt{K/\rho}} = \frac{V}{C}$$

where $V \rightarrow$ Velocity of flow

$C = \sqrt{K/\rho} \rightarrow$ Velocity of sound in fluid

Application:- Compressible flow

Note:-

If $Mc < 0.3 \rightarrow$ Gases flow can be treated as incompressible.

If $Mc > 0.3 \rightarrow$ Gases flow cannot be treated as incompressible.

If there is no heat transfer

$Mc < 1 \rightarrow$ Subsonic

$Mc > 1 \rightarrow$ Supersonic

$Mc = 1 \rightarrow$ Sonic

$Mc \gg 1 \rightarrow$ Hypersonic

Fluid Forces:-

- कुछ मामलों में, द्रव बल वस्तु की गति पर बहुत कम प्रभाव डालते हैं।
- अन्य मामलों में, द्रव बल सार्थक होते हैं।
Badminton, baseball, swimming, cycling, etc.
- रूचि के तीन प्रमुख तरल बल

1. Buoyancy उत्प्लावकता
2. Drag $\rightarrow$ प्रवाह की दिशा में
3. Lift $\rightarrow$ प्रवाह की लम्बवत (perpendicular) दिशा में

Drag:-

- एक तरल (वायु या पानी) के माध्यम से गतिमान वस्तु पर लगने वाले प्रतिरोधक बल

Two types:-

(1) **Surface Drag or Skin Drag:-** तरल में माध्यम से गतिमान वस्तु की सतह की चिकनाई पर मुख्य रूप से निर्भर करता है।

(2) **From drag (Pressure drag) :-** तरल के उपस्थित पिण्ड के क्रास सैक्शनल क्षेत्र पर निर्भर करता है

Drag force:-

$$F_D = C_D \rho A \frac{v^2}{2}$$

where $C_D =$ Drag coefficient

$$\frac{\rho v^2}{2} = \text{Dynamic pressure}$$

$A =$ प्रवाह की दिशा के लम्बवत सतह पर body का अनुमानित क्षेत्रफल

For sphere:-

$$C_D = \frac{24}{Re}$$

$$F_D = \frac{24 \times \mu}{\rho v D} \times \rho \times \frac{\pi D^2}{4} \times \frac{v^2}{2}$$

$$F_D = 3\pi\mu DV = 6\pi\mu RV$$

Lift:-

- एक net force जो तरल की सापेक्ष गति की दिशा में लम्बवत कार्य करता है, को represents करता है।
- यह वस्तु के पिछले भाग में द्रव प्रवाह के कारण किसी वस्तु के विपरीत पक्षों पर विभिन्न दबावों द्वारा निर्मित होता है।

Ex:- Airplane wing (Hydrofoil)

- बरनौली सिद्धान्त के अनुसार : वेग, दाब के व्युत्क्रमानुपाती होता है।

तेज सापेक्ष वेग $\Rightarrow$ निम्न दाब

निम्न सापेक्ष वेग $\Rightarrow$ उच्च दाब

Lift Force:-

$$F_L = C_L \rho A \frac{v^2}{2}$$

where C_L = Lift Coefficient

Note:- यदि सापेक्ष गति शून्य है

$$\text{Drag} = 0$$

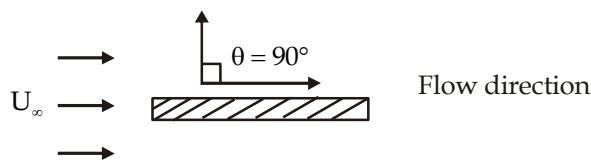
$$\text{Lift} = 0$$

Different types of bodies (विभिन्न प्रकार के पिंड) :-

Analysis of drag force (Drag force का विश्लेषण) :-

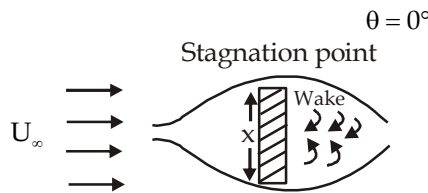
ये दो प्रकार के पिण्ड होते हैं-

1. **Streamlined bodies :-** वे पिण्ड जिनकी आकृति धारा रेखाओं के साथ मेल खाती है Streamlined bodies कहलाती है।



प्रवाह की अनुप्रस्थ दिशा में प्रक्षेपित क्षेत्र।

2. **Bluff Bodies :-** Bluff Body को उस body के रूप में परिभाषित किया जाता है, जिसकी सतह प्रवाह रेखा के साथ मल नहीं खाती है (समान नहीं होती है) जब प्रवाह में रखा जाता है तो प्रवाह को पिण्ड की सतह से उसके अनुगामी किनारे से बहुत पहले अलग कर दिया जाता है, बहुत बड़े वेक फोर्मेशन जोन के साथ। तब दाब के कारण ड्रग, पिण्ड पर घर्षण के कारण उत्पन्न ड्रग की तुलना में बहुत ज्यादा होता है। इस प्रकार ऐसी आकृति के पिंड जिनमें Pressure Drag, Friction drag की तुलना में बहुत ज्यादा होता है Bluff bodies कहलाते हैं।



Projected area in the direction of flow.

Wake :- वस्तु के नीचे की ओर एक निम्न दाब क्षेत्र उत्पन्न होता है, जिसे wake कहा जाता है, दूसरी ओर, ऊपर की ओर दाब बहुत अधिक होता है।

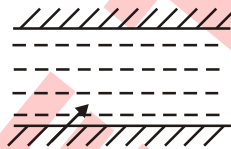
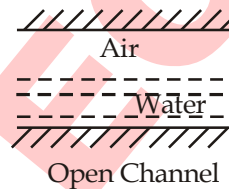
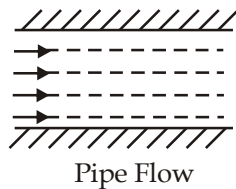
Note :- एक आदर्श तरल के लिए sphere के मामले में (प्रवाह के समकोण पर) दाब तीव्रता सामने (front) अधिकतम होगी और पीछे न्यूनतम सममित दाब वितरण के कारण total form drag शून्य होगा।

CHAPTER - 7 (PIPE FLOW)

Pipe:-



यह सामान्यतः एक गोलाकार cross section वाली एक नाली है। क्रॉस खण्ड का आकार, गोलाकार, वर्गाकार, त्रिकोणीय आदि हो सकता है।



Viscous force is highly dominant

$Re < 2000 \rightarrow$ Laminar flow

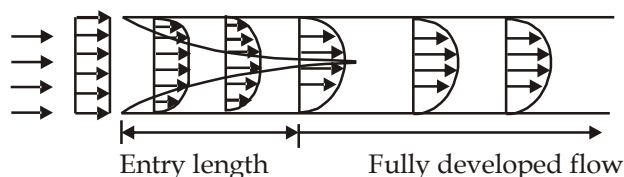
Re Number $> 4000 \rightarrow$ Turbulent flow

Hydraulic Mean dia:- $\frac{4A}{P}$

For circular pipe = $\frac{4 \cdot \frac{\pi D^2}{4}}{\pi D} = D$

Hydraulic Mean Depth (m) = $\frac{\text{Wetted Area (A)}}{\text{Wetted Perimeter (P)}}$

For circular cross section, $m = \frac{\frac{\pi D^2}{4}}{\pi D} = \frac{D}{4}$

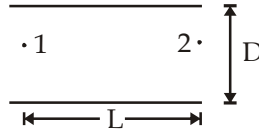


Head Losses :- जब पाइप से तरल का प्रवाह होता है, तो तरल कुछ प्रतिरोध का अनुभव करता है, जिसके कारण द्रव की कुछ ऊर्जा नष्ट हो जाती है। ऊर्जा को इस हानि का वर्गीकरण इस प्रकार किया जाता है।

1. Major Losses (प्रमुख हानियाँ)
2. Minor Losses (लघु हानियाँ)
1. **Major Losses (प्रमुख हानियाँ) :-** यह सतह के बीच आंतरिक घर्षण के कारण होता है।

$$\text{Total Head} = \frac{P}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + z$$

Darcy-Weisbach formula :-



$$h_f = \frac{fLV^2}{2gD} \quad \dots(i)$$

where V = average velocity

f = friction factor

$f = 4f'$

f' = Coefficient of friction

Coefficient of friction :-

For laminar flow

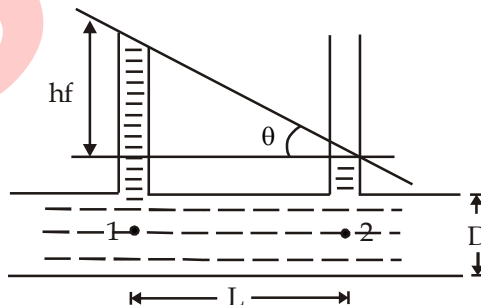
$$f' = \frac{16}{Re}$$

For Turbulent Flow

$$f' = \frac{0.079}{(Re)^{1/4}}$$

$$\therefore f = 4f' \Rightarrow f = \frac{64}{Re}$$

Chezy's Formula



$$V = C\sqrt{mi}$$

C = Chezy constant

$$m = \text{Hydraulic Mean depth} = \frac{D}{4}$$

$$i = \text{slope} \Rightarrow \tan \theta = i = \frac{h_f}{L} = \text{Hydraulic gradient}$$

$$V = C \sqrt{\frac{D}{4} \times \frac{h_f}{L}}$$

$$V^2 = C^2 \left(\frac{D}{4} \times \frac{h_f}{L} \right)$$

$$h_f = \frac{4LV^2}{C^2 D} \quad \dots(ii)$$

From equation (i) and (ii), $\frac{f}{2g} = \frac{4}{C^2} \Rightarrow C = \sqrt{\frac{8g}{f}}$

where

C = Chezy's constant

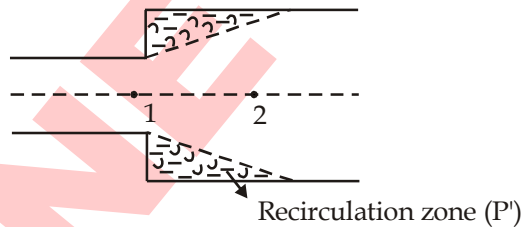
g = gravitational acceleration

f = friction factor

Dimension of chezy's constant = $(L)^{1/2} T^{-1}$

2. Minor Losses:-

- (i) अचानक विस्तार के कारण हानि
- (ii) निकास के कारण हानि
- (iii) अचानक सिकुडन के कारण हानि
- (iv) प्रवेश के कारण हानि
- (v) Losses due to bend in pipe.
- (i) **Losses due to sudden expansion :-**

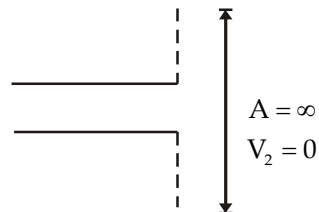


Assumption:-

$$P_1 = P_2$$

$$h_L = \frac{(V_1 - V_2)^2}{2g}$$

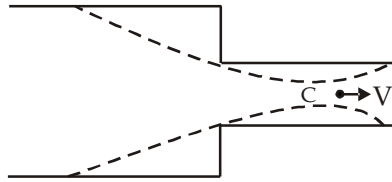
(ii) Due to exit:-



$$h_L = \frac{(V_1 - V_2)^2}{2g}$$

$$h_L = \frac{V^2}{2g}$$

(iii) Due to sudden contraction:-



$$h_L = \frac{(V_c - V)^2}{2g}$$

$$h_L = \frac{\left(\frac{V}{C_c} - V\right)^2}{2g}$$

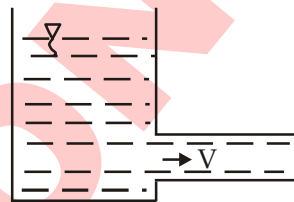
$$h_L = \frac{V^2}{2g} \left(\frac{1}{C_c} - 1\right)^2$$

If C_c is not given

$$\left(\frac{1}{C_c} - 1\right)^2 = 0.5$$

$$h_L = \frac{0.5V^2}{2g}$$

(iv) Due to entry:-



$$h_L = \frac{0.5V^2}{2g}$$

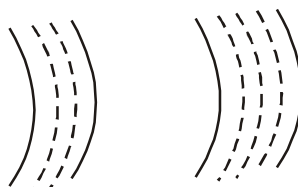
(v) Due to pipe bend:-

$$h_L = \frac{KV^2}{2g}$$

K = coefficient of pipe bend

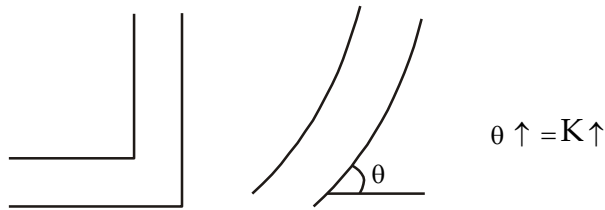
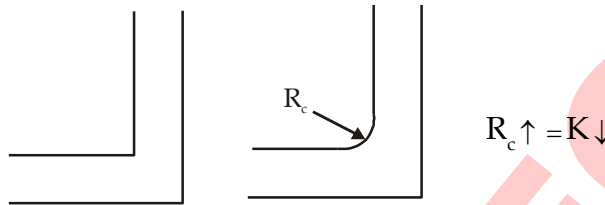
Effect of K :-

(I) Dia:-



$$D \uparrow = K \downarrow$$

(II) Angle

(III) Radius of curvature (R_c):-**Head Loss in terms of discharge:-**

$$h_f = \frac{fLV^2}{2gD} \quad \dots(A)$$

We know that

$$Q = AV$$

$$Q = \frac{\pi}{4} D^2 \times V$$

$$V = \frac{4Q}{\pi D^2} \quad \dots(B)$$

By equation (A) and (B)

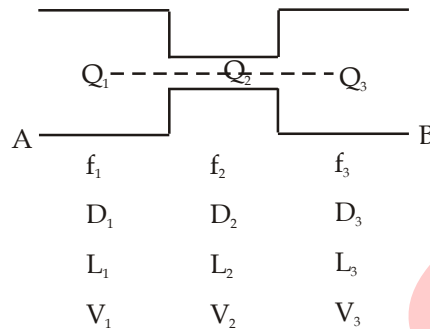
$$h_f = \frac{fL \left(\frac{4Q}{\pi D^2} \right)^2}{2gD}$$

$$h_f = \frac{16fLQ^2}{2g\pi^2 D^5} \quad \left(\because \frac{16}{2g\pi^2} = \frac{1}{12} \right)$$

$$h_f = \frac{1}{12} \frac{fLQ^2}{D^5}$$

Connection in Pipe

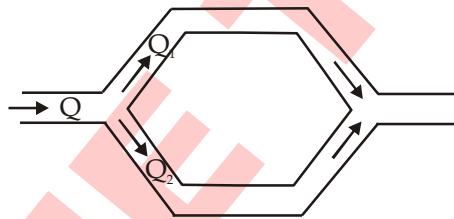
1. Series
2. Parallel
1. Series connection



$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q \rightarrow \text{Remain constant}$$

$$h_{f_{AB}} = h_{f_1} + h_{f_2} + h_{f_3}$$

2. Parallel connection

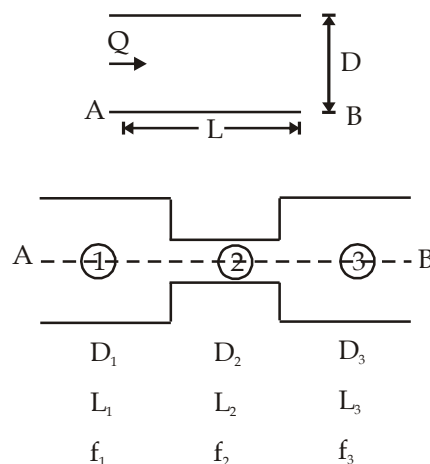


$$Q = Q_1 + Q_2$$

$$h_{f_1} = h_{f_2} \rightarrow \text{Remain constant}$$

Equivalent Pipe:- यह एक निश्चित लम्बाई और व्यास का एक पाईप है जिसमें समान निस्सरण (Discharge) और समान शीर्ष हानि होती है

For Series Connection:-



$$h_{f_{eq}} = h_{f_1} + h_{f_2} + h_{f_3}$$

$$\frac{fL_{eq}Q^2}{12D_{eq}^5} = \frac{f_1L_1Q^2}{12D_1^5} + \frac{f_2L_2Q^2}{12D_2^5} + \frac{f_3L_3Q^2}{12D_3^5}$$

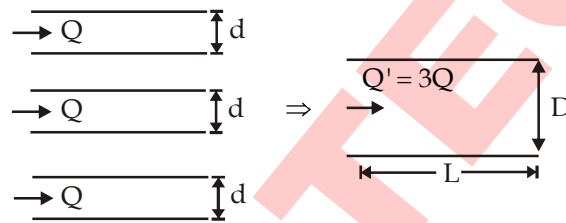
$$\frac{fL_{eq}}{D_{eq}^5} = \frac{f_1L_1}{D_1^5} + \frac{f_2L_2}{D_2^5} + \frac{f_3L_3}{D_3^5}$$

If $f_1 = f_2 = f_3 = f$

$$\frac{L_{eq}}{D_{eq}^5} = \frac{L_1}{D_1^5} + \frac{L_2}{D_2^5} + \frac{L_3}{D_3^5}$$

This is known as Dupuit's equation

For Parallel Connection :- Discharge बढ़ता है लेकिन शीर्ष हानि सभी पाइपों में समान होती है।



$$Q' = Q + Q + Q = 3Q$$

Relation between D and d

We know that in parallel connection

$$h_f = h_{f_{eq}} \Rightarrow \frac{fLQ^2}{12d^5} = \frac{fL(3Q)^2}{12D^5}$$

$$D^5 = 9d^5$$

$$D = (3^2)^{1/5}d$$

$$D = 1.55d$$

If number of pipe are 'n'

$$D_{eq} = (n)^{2/5}d$$

Lines:-

1. कुल ऊर्जा रेखा या ऊर्जा प्रवणता रेखा
2. हाइड्रोलिक ढाल रेखा

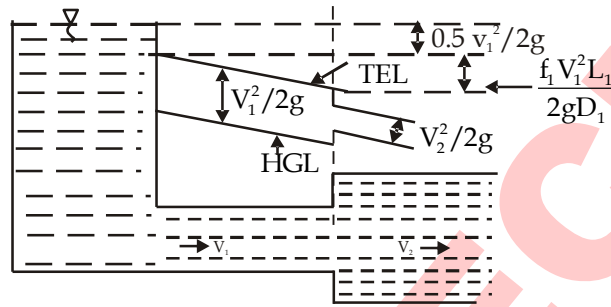
1. Total energy line (कुल ऊर्जा रेखा) :-

- यह पाइप प्रवाह में, पाइप के विभिन्न cross section पर total head को value को दर्शाने वाले बिन्दु को मिलाने वाली रेखा होती है।
- ये रेखायें हमेशा प्रवाह की दिशा में तब तक नीचे जाती हैं जब तक कि कुछ ऊर्जा बाहरी रूप से आपूर्ति न हो जाए।

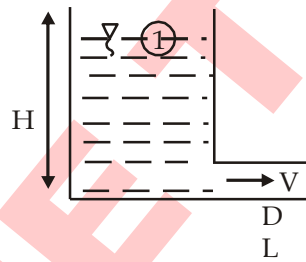
Ex:- पम्प

2. Hydraulic gradient line (हाइड्रोलिक ढाल रेखा) :-

- यह पाइप प्रवाह में, पाइप के विभिन्न cross section पर piezometric head की value को दर्शाने वाले बिन्दु को मिलाने वाली रेखा होती है।
- ये रेखाएँ प्रवाह की दिशा में ऊपर या नीचे होती है।
- ये रेखायें हमेशा कुल ऊर्जा रेखा के नीचे होती है।
- एक समान व्यास के pipe में यह रेखाएँ हमेशा 'कुल ऊर्जा रेखा' के समान्तर होती है, और पाइप के किसी भी section पर दो रेखाओं के बीच का vertical gap गतिज शीर्ष की value को बताता है।



Power Transmission through pipe:-



At point 1

$$\text{Energy (Joule)} = mgH$$

$$\text{Power (watt)} = \dot{m}gH$$

$$m = \text{mass flow rate} = \rho AV$$

$$(\text{Power})_{\text{input}} = \dot{m}gH$$

$$P_{\text{output}} = \dot{m}g(H - h_f)$$

$$P_{\text{output}} = \rho AVg(H - h_f)$$

$$P_{\text{output}} = \rho AVg \left(H - \frac{fLV^2}{2gD} \right)$$

$$P_{\text{output}} = \rho Ag \left(HV - \frac{fLV^3}{2gD} \right)$$

For maximum power output

$$\frac{dP_{\text{output}}}{dV} = 0$$

$$\frac{d}{dV} \left[\rho Ag \left(HV - \frac{fLV^3}{2gD} \right) \right] = 0$$

$$\rho Ag \left[H - \frac{3fLV^2}{2gD} \right] = 0$$

$$\rho Ag (H - 3h_f) = 0$$

$$\rho Ag \neq 0$$

$$H - 3h_f = 0$$

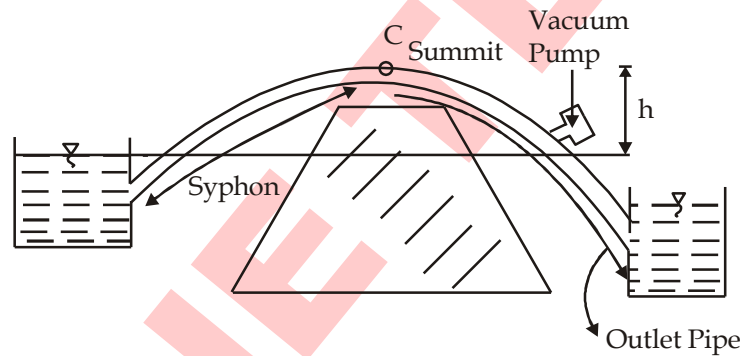
$$h_f = \frac{H}{3} = 33.33\% \rightarrow \text{minimum head losses to fixed maximum power output}$$

$$(P_{\text{output}})_{\text{max}} = H - h_f$$

$$H - \frac{H}{3} = \frac{2H}{3} = 66.67\%$$

$$(P_{\text{output}})_{\text{max}} = \frac{2H}{3} = 66.67\% \rightarrow \text{maximum power output}$$

Syphon:-



सायफन एक लम्बी मुड़ी हुई पाइप है जिसका उपयोग एक उच्च ऊँचाई के जलाशय से कम ऊँचाई के जलाशय में तरल को स्थांतरित करने में किया जाता है, जब दो जलाशय चित्र में दिखाए अनुसार किसी पहाड़ी या उच्च स्तरीय जमीन के द्वारा अलग अलग हो जाते हैं।

बिन्दु C जो सायफन के उच्चतम स्तर पर है 'शिखर' कहलाता है। टैंक A में पानी की स्वतंत्र सतह के ऊपर बिन्दु C की तरह, बिन्दु C पर दाब वायुमण्डलीय दाब से कम होगा। सैद्धांतिक रूप से C पर दाब 10.3 M of water तक कम किया जा सकता है, लेकिन वास्तविक व्यवहार में यह दाब केवल 7.6m of water या $10.3 - 7.6 = 2.7\text{m}$ of water होता है।

यदि C पर दाब 2.7m of water से कम हो जाता है तो घुली हुई हवा और अन्य गैसों पानी से बाहर आ जायेंगी और शिखर (summit) पर एकत्रित हो जायेंगी।

$$\frac{P_s}{\rho g} > \frac{P_v}{\rho g}$$

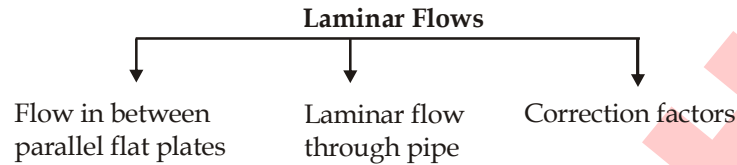
$$\frac{P_s}{\rho g} = \text{Pressure head at summit}$$

$$\left(\frac{P_s}{\rho g} \right)_{\text{min}} = \frac{P_v}{\rho g}$$

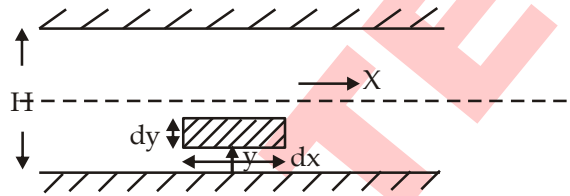
$$\frac{P_v}{\rho g} = \text{Vapour pressure head}$$

CHAPTER - 8

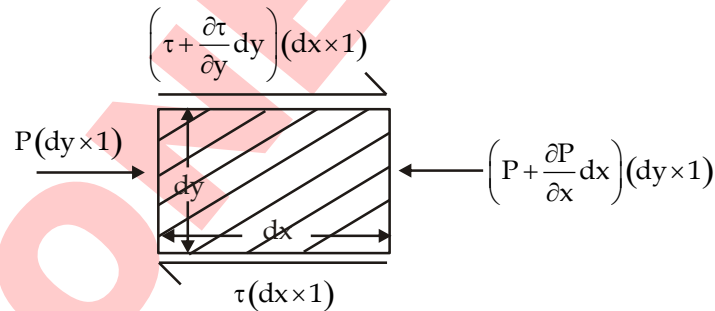
(LAMINAR FLOW)



1. **समान्तर flat plates के मध्य प्रवाह :-** चित्र में दिखाये अनुसार t दूरी पर दो समान्तर प्लेट की कल्पना कीजिए। दोनों प्लेट के मध्य एक श्यान द्रव बांयी से दांयी ओर प्रवाहित होता है। निचली स्थिर प्लेट से y दूरी पर एक fluid element की कल्पना करते हैं जिसकी लम्बाई dx तथा मोटाई dy है।



Width=1



Momentum Equation in X-direction

$$F_{Px} + F_{Gx} + F_{Vx} = F_{ix}$$

$$Pdy - \left(P + \frac{\partial P}{\partial x} dx \right) dy - \tau dx + \left(\tau + \frac{\partial \tau}{\partial y} dy \right) dx = dm \cdot a_x$$

No change in a_x due to uniform cross section and laminar flow $\Rightarrow a_x = 0$

$$-\frac{\partial P}{\partial x} dx dy + \frac{\partial \tau}{\partial y} dy dx = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial \tau}{\partial y}$$

For Newtonian Fluids

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial P}{\partial x}$$

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial P}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x}$$

Integrate it

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} y + C_1$$

Again Integrate it

$$u = \frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2 \quad \dots(1)$$

Apply Boundary conditions:-

at $y=0, u=0$

$$C_2 = 0$$

at $y=H, u=0$

$$C_1 H = \frac{-1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \frac{H^2}{2}$$

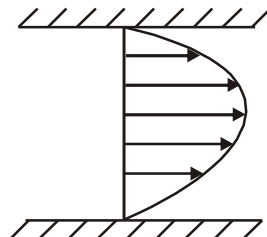
$$C_1 = \frac{-1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \frac{H}{2}$$

$$u = \frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \cdot \frac{y^2}{2} - \frac{1}{\mu} \frac{H}{2} y \frac{\partial P}{\partial x}$$

$$u = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial x} [y^2 - Hy]$$

$$u = -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial x} [Hy - y^2]$$

इस प्रकार हम कह सकते हैं कि वेग की प्रोफाइल पैराबोलिक है।



Maximum velocity

at $y = \frac{H}{2}$, $u = u_{\max}$

$$u_{\max} = \frac{-1}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \left[H \times \frac{H}{2} - \frac{H^2}{4} \right]$$

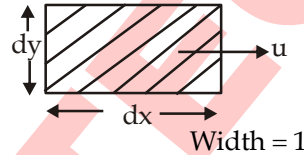
$$u_{\max} = \frac{-1}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \frac{H^2}{4}$$

$$u_{\max} = \frac{-H^2}{8\mu} \frac{\partial P}{\partial x}$$

Mean velocity:- (Mass flow rate same at this velocity)

$$\dot{m} = \int_0^H d\dot{m}$$

$$\dot{m} = \int_0^H \rho(dy \times 1)u$$



$$\rho(H \times 1) U_{\text{mean}} = \int_0^H \rho \left[\frac{-1}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial x} (Hy - y^2) \right] dy$$

$$H U_{\text{mean}} = \frac{-1}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \int_0^H (Hy - y^2) dy$$

$$H. U_{\text{mean}} = \frac{-1}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \times \left[\frac{H^3}{2} - \frac{H^3}{3} \right]$$

$$H. U_{\text{mean}} = \frac{-1}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \frac{H^3}{6}$$

$$U_{\text{mean}} = \frac{-H^2}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{U_{\max}}{1.5}$$

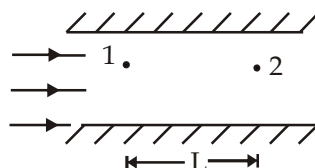
$$\Rightarrow U_{\max} = 1.5 U_{\text{mean}}$$

Pressure Drop:- (Head Loss)

Pressure drop में हम माध्य वेग का उपयोग करते हैं।

$$U_{\text{mean}} = \frac{-H^2}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial x}$$

Flow direction



$$\frac{12\mu U_{\text{mean}}}{H^2} dx = -dP$$

Integrate it

$$\frac{12\mu U_{\text{mean}}}{H^2} \int_0^L dx = -\int_1^2 dP$$

$$\frac{12\mu U_{\text{mean}} L}{H^2} = -(P_2 - P_1)$$

$$\frac{12\mu U_{\text{mean}} L}{H^2} = P_1 - P_2$$

$$\frac{P_1 - P_2}{\rho g} = \frac{12\mu U_{\text{mean}} L}{\rho g H^2}$$

In case of inclined:- $\left(\frac{P_1}{\rho g} + Z_1\right) - \left(\frac{P_2}{\rho g} + Z_2\right) = \frac{12\mu U_{\text{mean}} L}{\rho g H^2} = h_f$

Shear stress distribution (कर्तन प्रतिबल वितरण) :-

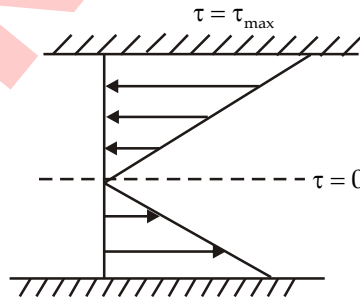
$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

$$\tau = \mu \frac{d}{dy} \left[\frac{-1}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial x} (Hy - y^2) \right]$$

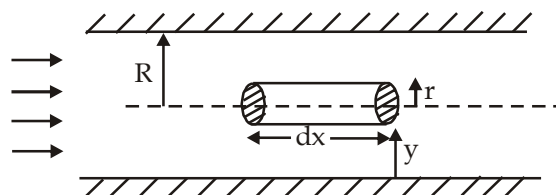
$$\tau = \mu \times \frac{-1}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial x} (H - 2y)$$

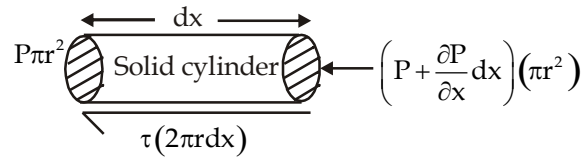
$$\tau = \frac{-1}{2} \frac{\partial P}{\partial x} (H - 2y)$$

इस प्रकार हम कह सकते हैं कि कर्तन प्रतिबल के वितरण की प्रोफाइल रेखीय प्रोफाइल होती है।



2. **Laminar flow through pipe (पाइप से लेमिनार प्रवाह) :-** R त्रिज्या का एक क्षैतिज पाइप की कल्पना कीजिए। जैसा कि चित्र में दिखाया गया एक श्यान द्रव पाइप में बायीं से दायीं ओर प्रवाहित हो रहा है। r त्रिज्या के एक fluid element की कल्पना कीजिए तथा इसकी लम्बाई dx मानिए।





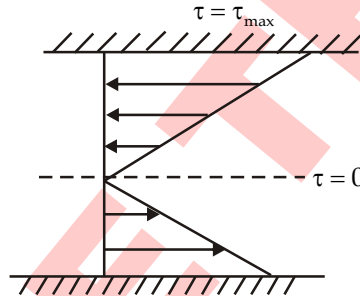
X-दिशा में momentum equation से

$$\rho \pi r^2 - \left(P + \frac{\partial P}{\partial x} dx \right) \pi r^2 - \tau(2\pi r dx) = d m a_x$$

एक समान अनुप्रस्थ काट तथा laminar flow के कारण ($a_x = 0$)

$$\left[\frac{-\partial P}{\partial x} dx \right] \pi r^2 = \tau 2\pi r dx$$

$$\tau = \frac{-r}{2} \frac{\partial P}{\partial x} \quad \dots(1)$$



Velocity Profile (वेग प्रोफाइल) :-

For newtonian fluid $\tau = \mu \frac{du}{dy}$ (2)

By equation (1) and (2)

$$\mu \frac{du}{dy} = \frac{-r}{2} \frac{\partial P}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-r}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial x}$$

$$y + r = R$$

$$dy + dr = 0$$

$$dy = -dr$$

$$\frac{-\partial u}{\partial r} = \frac{-r}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial x}$$

Integrate it

$$u = \frac{r^2}{4\mu} \frac{\partial P}{\partial x} + C$$

Apply Boundary condition

At $r=R, u=0$

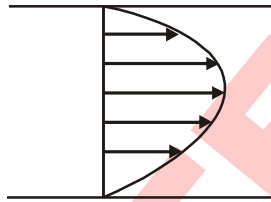
$$C = -\frac{R^2}{4\mu} \frac{\partial P}{\partial x}$$

$$u = \frac{r^2}{4\mu} \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{R^2}{4\mu} \frac{\partial P}{\partial x}$$

$$u = -\frac{1}{4\mu} \frac{\partial P}{\partial x} (R^2 - r^2)$$

$$u = -\frac{R^2}{4\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]$$

इस प्रकार हम कह सकते हैं कि वेग की प्रोफाइल पैराबोलिक प्रोफाइल है।



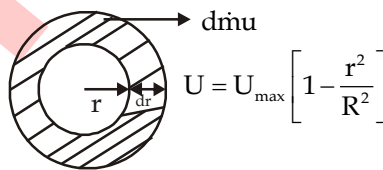
Maximum velocity (अधिकतम वेग) :-

$$r=0$$

$$U_{\max} = -\frac{R^2}{4\mu} \frac{\partial P}{\partial x}$$

$$U = U_{\max} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]$$

Mean velocity (माध्य वेग) :-



$$\dot{m} = \int d\dot{m}$$

$$d\dot{m} = \rho(dA)u$$

$$= \rho(2\pi r dr)u$$

$$\dot{m} = \int_0^R d\dot{m}$$

$$\rho(\pi R^2)u_{\text{mean}} = \int_0^R \rho(2\pi r dr)u$$

$$U_{\text{mean}} = \frac{2}{R^2} \int_0^R ur dr$$

$$U_{\text{mean}} = \frac{2}{R^2} \int_0^R U_{\text{max}} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] r \, dr$$

$$U_{\text{mean}} = \frac{2U_{\text{max}}}{R^2} \int_0^R \left[r - \left(\frac{r^3}{R^2} \right) \right] dr$$

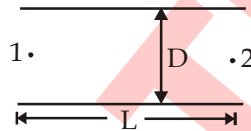
$$U_{\text{mean}} = \frac{2U_{\text{max}}}{R^2} \left[\frac{R^2}{2} - \frac{R^2}{4} \right]$$

$$U_{\text{mean}} = \frac{2U_{\text{max}}}{R^2} \left(\frac{R^2}{4} \right)$$

$$U_{\text{mean}} = \frac{U_{\text{max}}}{2}$$

$$U_{\text{mean}} = -\frac{R^2}{8\mu} \frac{\partial P}{\partial x}$$

Pressure Head Loss (दाब शीर्ष हानि) :-



$$U_{\text{mean}} = -\frac{R^2}{8\mu} \frac{\partial P}{\partial x}$$

$$U_{\text{mean}} = -\frac{D^2}{32\mu} \frac{\partial P}{\partial x}$$

$$\frac{32\mu U_{\text{mean}}}{D^2} dx = -dP$$

Integrate it

$$\frac{32\mu U_{\text{mean}}}{D^2} \int_0^L dx = -\int_1^2 dP$$

$$\frac{32\mu U_{\text{mean}} L}{D^2} = P_1 - P_2$$

$$\frac{P_1 - P_2}{\rho g} = \frac{32\mu U_{\text{mean}} L}{\rho g D^2} \rightarrow \text{Hagen Poiseuille's equation}$$

Darcy-weisbach & Hagen Poiseuille:-

$$h_f = \frac{32\mu U_{\text{mean}} L}{\rho D^2 g}$$

$$\frac{f L U_{\text{mean}}^2}{2gD} = \frac{32\mu U_{\text{mean}} L}{\rho g D^2}$$

$$f = \frac{64\mu}{U_{\text{mean}} D \rho}$$

$$f = \frac{64}{\frac{\rho V D}{\mu}}$$

$$f = \frac{64}{Re}$$

We know that

$$f = 4f' \Rightarrow f' = \frac{f}{4}$$

$$f' = \frac{64}{Re} \times \frac{1}{4}$$

$$f' = \frac{16}{Re}$$

where

f = friction factor

f' = Coefficient of friction

शीर्ष हानि की गणना में हम दोनों में से किसी भी equation का उपयोग कर सकते हैं।

Wall Shear Velocity (V^*):-



$$\tau = -\frac{r}{2} \frac{\partial P}{\partial x}$$

Shear at wall

At

$$r = R, \quad \tau = \tau_0$$

$$\tau_0 = -\frac{R}{2} \frac{\partial P}{\partial x}$$

$$-\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{2\tau_0}{R}$$

$$-\int_1^2 dP = \frac{2\tau_0}{R} \int_0^L dx$$

$$P_1 - P_2 = \frac{2\tau_0}{R} L$$

$$\frac{P_1 - P_2}{\rho g} = \frac{2\tau_0 L}{\rho g R}$$

$$h_f = \frac{4\tau_0 L}{\rho g D}$$

$$\frac{f L V^2}{2gD} = \frac{4\tau_0 L}{\rho g D}$$

$$V^2 = \frac{8\tau_0}{\rho f}$$

$$\frac{\tau_0}{\rho} = \frac{fV^2}{8} \quad \dots(1)$$

$$V^* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = V \sqrt{\frac{f}{8}}$$

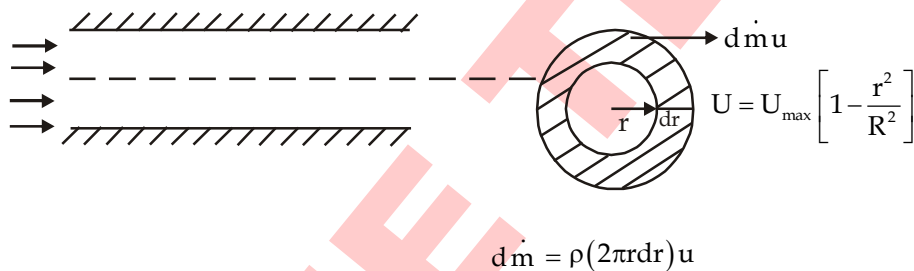
Wall Shear Stress

$$\frac{\tau_0}{\rho} = V^2 \frac{f}{8}$$

$$\tau_0 = \frac{f\rho V^2}{8}$$

Correction Factor:-

Momentum Correction Factor (β):- यह वास्तविक वेग पर आधारित प्रति सेकण्ड प्रवाह के momentum औसत वेग पर आधारित प्रवाह दर का momentum का अनुपात होता है। जबकि अनुपात काट समान होता है।



$$\beta = \frac{\text{Actual momentum / sec. through the pipe cross-section}}{\text{Momentum / sec. on the basis of mean velocity through same cross-section of pipe}}$$

$$\beta = \frac{\int_0^R d\dot{m}u}{\dot{m}U_{\text{mean}}}$$

$$d\dot{m} = \rho(2\pi r dr)u$$

$$\beta = \frac{\int_0^R \rho 2\pi r dr \cdot U_{\text{max}}^2 \left[1 - \frac{r^2}{R^2}\right]^2}{\rho(\pi R^2) U_{\text{mean}}^2}$$

$$\beta = \frac{2 U_{\text{max}}^2}{R^2 U_{\text{mean}}^2} \int_0^R \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^2 r dr$$

$$\beta = \frac{2 U_{\text{max}}^2}{R^2 \frac{U_{\text{max}}^2}{4}} \int_0^R \left(1 + \frac{r^4}{R^4} - \frac{2r^2}{R^2}\right) r dr$$

$$\beta = \frac{8}{R^2} \left[\frac{R^2}{2} + \frac{R^2}{6} - \frac{R^2}{2} \right]$$

$$\beta = \frac{8}{6} = 1.33$$

Energy Correction factor or kinetic energy Correction factor (α): यह वास्तविक वेग पर आधारित प्रवाह दर की गतिज ऊर्जा तथा औसत वेग पर आधारित प्रवाह दर की गतिज ऊर्जा का अनुपात होता है जबकि अनुप्रस्थ काट समान होता है।

$$\alpha = \frac{\text{Actual kinetic energy / sec. through the pipe cross-section}}{\text{kinetic energy / sec. on the basis of mean velocity through the same cross-section of pipe}}$$

$$\alpha = \frac{\int_0^R \frac{1}{2} dm u^2}{\frac{1}{2} \dot{m} U_{\text{mean}}^2}$$

$$\alpha = \frac{\int_0^R \rho (2\pi r dr) U_{\text{max}}^3 \left[\left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \right]^3}{\rho (\pi R^2) U_{\text{mean}}^3}$$

$$\alpha = \frac{2 U_{\text{max}}^3}{R^2 U_{\text{mean}}^3} \int_0^R \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)^3 r dr$$

$$\alpha = \frac{2 U_{\text{max}}^3}{R^2 \frac{U_{\text{mean}}^3}{8}} \int_0^R \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)^3 r dr$$

समाकलित करने पर

$$\int_0^R \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)^3 r dr = \frac{1}{8} R^2$$

$$\alpha = \frac{2}{R^2} \times 8 \times \frac{1}{8} R^2$$

$$\alpha = 2.0$$

	α	β
Laminar	2.0	1.33
Turbulent	1.33	1.2